

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
INSTITUTO DE GEOLOGÍA

BOLETÍN NÚMERO 99

CRISTALOGRAFIA FISICA

POR

FRANCISCO J. FABREGAT GUINCHARD



MÉXICO, D. F.
1977

Primera edición: 1977

CRISTALOGRAFÍA FÍSICA

FRANCISCO JOSÉ FABREGAT GUINCHARD

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



DR © 1977, Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad Universitaria, México 20, D. F.

DIRECCIÓN GENERAL DE PUBLICACIONES

Impreso y hecho en México

CRISTALOGRAFÍA FÍSICA

Francisco José FABREGAT GUINCHARD*

* Investigador Titular en el Instituto de Geología. Ciudad Universitaria. México 20, D. F.

CONTENIDO

INTRODUCCION	11
CRISTAL	13
PROPIEDADES FUNDAMENTALES DEL MEDIO CRISTALINO	15
Homogeneidad	15
Anisotropía	15
Simetría	16
Propiedades físicas	16
Transformación de vectores y tensores	19
Tensores de 2º orden	20
Propiedades simétricas de los tensores	21
Representación geométrica de un tensor de 2º orden	22
Efecto de la simetría cristalina sobre un II-tensor	24
PROPIEDADES MECANICAS DE LOS CRISTALES	27
Elasticidad	27
Deformación	28
Exfoliación	33
Corrimiento	36
Fractura	39
Dureza	40
PROPIEDADES MAGNETICAS DE LOS CRISTALES	43
Nociones fundamentales	43

Teoría del magnetismo en los cristales	46
Influencia del campo magnético en la cristalización	47
PROPIEDADES ELECTRICAS DE LOS CRISTALES	48
Inducción electrostática	48
Conductibilidad eléctrica	51
Conductores eléctricos	51
Producción de cargas eléctricas	53
PIROELECTRICIDAD	55
Ferroelectricidad	57
PROPIEDADES OPTICAS DE LOS CRISTALES	59
Principios generales	59
Color, transparencia, brillo	61
Color superficial	61
Color por transparencia	62
Absorción de la luz	63
Brillo	65
Birrefringencia y polarización	67
Birrefringencia	67
Elipsoide de índices	72
Angulo de los ejes ópticos	74
Polarización	75
Procedimientos para obtener luz polarizada	78
Eliminación de uno de los dos rayos polarizados	80
Microscopio polarizante	82
Observaciones en ortoscopio	87
Con un polarizante	87
Con dos polarizantes	89
Observaciones en conoscopio	96
Cristales uniáxicos	97
Cristales biáxicos	102
Figuras de interferencia en una esfera	107
Polarización rotatoria	107
Su relación con la simetría cristalina	110
PROPIEDADES TERMICAS DE LOS CRISTALES	111

Comportamiento ante los rayos caloríficos	111
Conducción de la energía	111
Datos experimentales de conductibilidad	117
Influencia de la temperatura en la conductibilidad	118
Dilatación de los cristales	120
Medio isotropo	121
Medio anisotropo	121
Mediciones prácticas	122
Dilatación volumétrica	123
Coeficientes de dilatación	124
Influencia de la temperatura en las propiedades ópticas	124

PIEZOELECTRICIDAD	126
Generalidades	126
Naturaleza analítica de la tensión	128
Efecto de la simetría sobre [d]	131

ANEXOS

1. El concepto de cristal	135
2. El cristal es una forma estable de las sustancias	137
3. Los términos de isotropía y anisotropía	137
4. La simetría	137
5. Sistemas y simonías cristalinas	138
6. Nieve y Hielo	142
7. Caras y aristas	143
8. Los 11 grupos de simetría de Laue	145
9. Operadores M de los elementos de simetría	146
10. Construcción de Poinot	147
11. La celda elemental	148
12. Elementos de la teoría de matrices	149

BIBLIOGRAFIA	157
-------------------------------	------------

INDICE ANALITICO	159
-----------------------------------	------------

INDICE DE TABLAS

	<i>Págs.</i>
Tablas	
I. Propiedades físicas	17
II. El tensor-II en las diferentes singonías	25
III. Coeficientes de dilatación en dirección de los ejes principales del elipsoide	31
IV. Cuadro comparativo de las 3 escalas de dureza	41
V. Valores de ϵ en algunos cristales	50
VI. Clases cristalinas piroeléctricas	57
VII. Escala de Newton con los colores de interferencia	93
VIII. Ejemplos de cristales con poder rotatorio	110
IX. Generalización de las relaciones eléctricas y magnéticas para medios anisótropos	114
X. Susceptibilidad magnética	115
XI. Constantes dieléctricas relativas	116
XII. Conductibilidad térmica	116
XIII. Resistividad eléctrica	117
XIV. Coeficientes de dilatación térmica	123
XV. Módulos piroeléctricos de las clases no centrosimétricas	132
XVI. Símbolos de las 32 clases de simetría	139
XVII. Las clases de simetría	140
XVIII. Los 11 grupos de simetría de Laue	145
XIX. Operadores de rotación propia	146
XX. Operadores de rotación impropia (inversora)	147

INDICE DE TABLAS

Págs.	Tablas
17	I. Propiedades físicas
28	II. El tensor II en las diferentes simetrías
31	III. Coeficientes de dilatación en dirección de los ejes principales del elipsoide
41	IV. Constante combinatoria de las 3 escalas de durezas
50	V. Valores de α en algunos cristales
57	VI. Clases cristalinas pitotógraficas
93	VII. Escala de Newton con los colores de interferencia
110	VIII. Ejemplos de cristales con poder rotatorio
113	IX. Generalización de las relaciones eléctricas y magnéticas para medios anisótropos
115	X. Susceptibilidad magnética
119	XI. Constantes dieléctricas relativas
119	XII. Conductividad térmica
117	XIII. Resistividad eléctrica
122	XIV. Coeficientes de dilatación térmica
127	XV. Módulos pitotógraficos de las clases no centrosimétricas
130	XVI. Símbolos de las 32 clases de simetría
140	XVII. Las clases de simetría
145	XVIII. Los 11 grupos de simetría de Laves
145	XIX. Operadores de rotación propia
147	XX. Operadores de rotación impropia (inversora)

INTRODUCCIÓN

No se pretende ofrecer con esta obra un curso sobre CRISTALOGRAFÍA FÍSICA; sí se ha redactado con miras a familiarizar a quienes deseen saber sobre las propiedades físicas del medio cristalino.

Lo leerán con provecho los mineralogistas, los químicos, los estudiantes que aún no hayan entrado en un curso especializado de cristalofísica, y cuantos teniendo nociones de cristalografía morfológica desearan completar su margen de conocimientos en esta disciplina, sin pretender especialización alguna.

Se pretendió dar a la obra un aspecto expositivo en sus principios y familiarizar paulatinamente al lector con algunas expresiones matemáticas, dejando para últimos temas la referencia a los métodos analíticos de uso más común.

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DEL MEDIO CRISTALINO

Tres son los caracteres fundamentales del medio cristalino:

1. *Homogeneidad*: "Porciones iguales de materia, e igualmente orientadas, tienen iguales propiedades". Es decir, direcciones y planos paralelos son equivalentes.

Debido a esta propiedad se pueden estudiar los cristales en fragmentos pequeños, ya que tienen las mismas características que los cristales enteros.

2. *Anisotropía*: "Direcciones diferentes dan en general diferentes valores al actuar sobre ellas un mismo agente físico", a la par que resultan valores equivalentes considerando direcciones paralelas y simétricas.

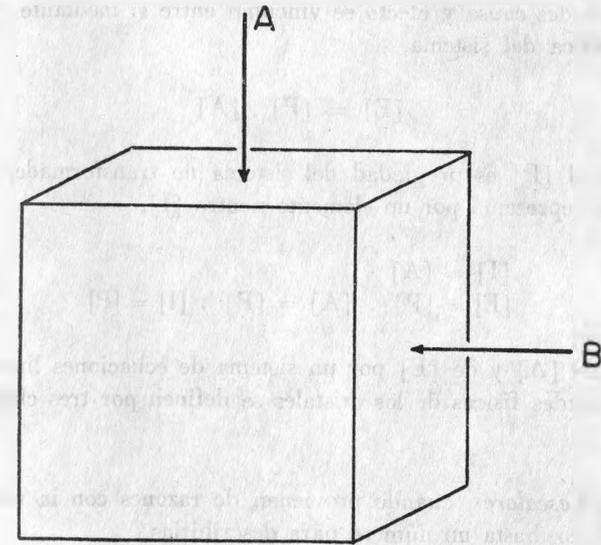


Figura 1. Cubo sometido a dos fuerzas.

Si se somete una cara A de un cubo tallado de una sustancia anisótropa a una presión x , para conseguir la misma deformación presionando sobre B, se ha de someter a esta cara a otra presión distinta y ,

— Si el cubo fuese de sustancia isótropa, igual deformación se obtendría presionando sobre A o sobre B con la misma intensidad.

3. *Simetría*: Cuando “hay equivalencia de propiedades según direcciones no paralelas”; o de otro modo, la simetría de un cristal desde el punto de vista geométrico, condiciona otra desde el físico. La simetría física en tales cuerpos puede aparecer más elevada que la geométrica.

Propiedades físicas

Cuando se estudia una propiedad de un sistema físico, se le somete a una acción causal A de magnitud [A], para obtener el efecto E de magnitud [E].

Las magnitudes causa y efecto se vinculan entre sí mediante otra magnitud [P] característica del sistema,

$$[E] = [P] \cdot [A]$$

La magnitud [P] es propiedad del sistema no transformado, ya que si la acción nula se representa por un elemento neutro [I],

$$[I] = [A]$$

$$[E] = [P] \cdot [A] = [P] \cdot [I] = [P]$$

[P] depende de [A] y de [E] por un sistema de ecuaciones lineales.

Las propiedades físicas de los cristales se definen por tres clases de magnitudes:

= propiedades *escalares*, cuando provienen de razones con la unidad elegida, y por lo tanto, basta un número para describirlas.

Propiedad escalar es, p. ej.,

la temperatura

el calor específico

(cantidad de calor necesario para elevar la temperatura de un cuerpo de 15.5° a 16.5°)

el peso específico,

o peso de la unidad de volumen de un cuerpo.

A más de los medios usados en física para determinarlo, es práctico

TABLA I. PROPIEDADES FÍSICAS

	Escalares	Vectoriales	Tensoides III—Tensor	IV—Tensor
Mecánicas	Densidad Dureza	Dureza Posición de un punto x Desplazamiento punto u Dirección deformación n Fuerza deformación k	Dilatación γ Deformación ϵ Tensión σ	Módulos elasticidad c
Térmicas	Temperatura Calor específico	Gradiente de temperatura t Corriente térmica w	Dilatación térmica e Conducción térmica k	Piezoelasticidad d
Eléctricas		Piroelectricidad vectorial Tensión E Desplazamiento D Gradiente potencial v Corriente eléctrica i	Piroelectricidad tensorial Constante dieléctrica ϵ Susceptibilidad eléctrica χ Constante conducción λ	
Ópticas Magnéticas		Polarización P Intensidad magnética H Inducción magnética B Polarización magnética M		

en cristalografía colocar el cristal en un líquido denso (Thoulet, Rhorbach, Clerici) que se diluye progresivamente hasta hacerlo flotar en su seno. Luego se determina la densidad del líquido por medio de la balanza de Mohr Westphal.

- = propiedades *vectoriales* son las que además se definen por una dirección: son propiedades dirigidas.
- = propiedades *tensoriales*, se definen por tensores o arreglos de coeficientes que expresan su dependencia con respecto a un sistema axial.

Son propiedades vectoriales o tensoriales las

- propiedades mecánicas de los cristales
- propiedades eléctricas de los cristales
- propiedades magnéticas de los cristales
- propiedades ópticas de los cristales
- propiedades térmicas de los cristales

Las relaciones matemáticas entre cantidades físicas se expresan mediante notación tensorial.

Como sistema de referencia se emplean tres ejes coordenados OX_1, OX_2, OX_3 o abreviadamente X_1, X_2, X_3 , mutuamente perpendiculares (coordenadas cartesianas). Un vector P puede representarse por sus componentes en el sistema coordenado:

$$P = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 \text{ ó abreviadamente, } P = p_ix_i; (i = 1,2,3)$$

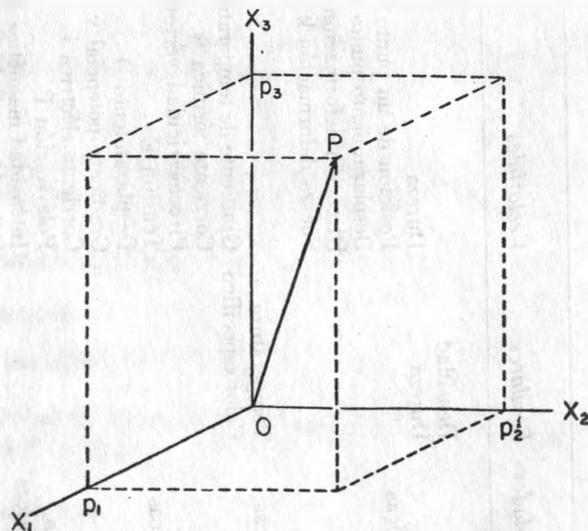


Figura 2. Vector P referido a sus tres componentes $p_1 + p_2 + p_3$.

Transformación de vectores y tensores. Cuando se desea estudiar una propiedad en cierta dirección particular, se gira la referencia axial hasta que coincida con tal dirección. Así, uno de los conceptos más importantes en cristalofísica es el de la transformación de ejes, o fórmulas del cambio de referencia de un vector, de ejes cartesianos antiguos a nuevos y viceversa. Las cantidades transformadas se distinguen de las primitivas apostrofándolas. Las nuevas posiciones de los ejes coordenados se definen por sus 3 cosenos directores (c_{ik}), esto es, los cosenos de los ángulos formados por las posiciones antigua y nueva de cada eje, según este esquema:

$$\begin{array}{c} X_1' \quad X_2' \quad X_3' \\ X_1 \quad c_{11} \quad c_{12} \quad c_{13} \\ X_2 \quad c_{21} \quad c_{22} \quad c_{23} \\ X_3 \quad c_{31} \quad c_{32} \quad c_{33} \end{array}$$

lo que significa que OX_1' se relaciona con OX_1, OX_2, OX_3 por sus cosenos directores c_{11}, c_{21}, c_{31} ; que OX_3' se define en relación de OX_1, OX_2, OX_3 mediante c_{31}, c_{32}, c_{33} .

Nótese que un vector P es la suma vectorial de sus componentes en el sistema de referencia:

$$\begin{array}{l} P = p_1 + p_2 + p_3 \\ P = Oa + ab + bp \end{array}$$

y referidas estas componentes al nuevo sistema de referencia que viene de transformar el antiguo por una rotación cualquiera,

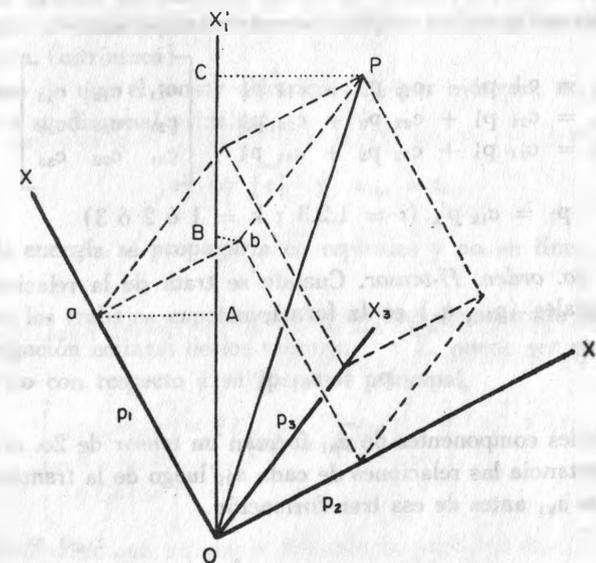


Figura 3. Transformación de ejes de referencia $O(X_1, X_2, X_3)$ sistema antiguo $O(X_1', X_2', X_3')$ sistema nuevo.

$$OX_1 = OA + AB + BC$$

$$= Oa.c_{11} + ab.c_{21} + bp.c_{31}$$

$$P_1 = c_{11}P_1 + c_{21}P_2 + c_{31}P_3$$

y así proyectando sobre OX_2 y OX_3 , no dibujados en la figura, resultaría en total,

$$P_1' = c_{11}P_1 + c_{21}P_2 + c_{31}P_3$$

$$P_2' = c_{12}P_1 + c_{22}P_2 + c_{32}P_3$$

$$P_3' = c_{13}P_1 + c_{23}P_2 + c_{33}P_3$$

que son las ecuaciones de transformación de las antiguas componentes de P a los nuevos ejes.

Los coeficientes de esta transformación se pueden escribir:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$$

y en notación tensorial,

$$P_i = c_{ki} P_k \quad (i = 1,2,3; k = 1 \text{ ó } 2 \text{ ó } 3)$$

Análogamente, para el problema inverso de calcular las nuevas componentes en función de las antiguas, se emplea la matriz traspuesta:

$$\begin{aligned} P_1 &= c_{11} P_1' + c_{12} P_2' + c_{13} P_3' \\ P_2 &= c_{21} P_1' + c_{22} P_2' + c_{23} P_3' \\ P_3 &= c_{31} P_1' + c_{32} P_2' + c_{33} P_3' \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$P_i = c_{ik} P_k' \quad (i = 1,2,3; k = 1 \text{ ó } 2 \text{ ó } 3)$$

Tensores de 2o. orden, II-tensor. Cuando se trata de la relación entre dos cantidades vectoriales (P_1, Q_k) en la forma,

$$P_1 = a_{ki} Q_k$$

las nueve cantidades componentes de a_{ki} forman un tensor de 2o. orden, II-tensor. Son de importancia las relaciones de cada a_{ki} luego de la transformación de ejes con todos los a_{ki} antes de esa transformación.

$$a_{ik} = c_{il} c_{km} a'_{lm}$$

$$a'_{ik} = c_{li} c_{mk} a_{lm}$$

Tensores de 3er. orden (III-tensores). Tienen 27 componentes, que indican cómo dependen linealmente las componentes p_i de un vector de las a_{ki} de un II-tensor.

$$p_i = a_{k1i} a_{k1}$$

y en ecuaciones de transformación,

$$a'_{i1k} = c_{mi} c_{mj} c_{ok} a_{mno}$$

$$a_{i1k} = c_{im} c_{in} c_{ko} a'_{mno}$$

Tensores de 4o. orden (IV tensores). Las 81 componentes que caracterizan a un punto, indican la dependencia lineal de las componentes a_{pq} de un II-tensor con respecto a las b_{ik} de otro II-tensor.

$$a_{pq} = a_{ikpq} b_{ik}$$

Sus fórmulas de transformación son,

$$a'_{ikpq} = c_{mi} c_{nk} c_{op} c_{rq} a_{mno}$$

$$a_{ikpq} = c_{im} c_{kn} c_{po} c_{qr} a'_{mno}$$

Propiedades simétricas de esos tensores. Todos esos tensores tienen la misma simetría propia (intrínseca).

En el caso de que el tensor eléctrico $[\epsilon]$, por ejemplo, no fuese simétrico con respecto a su diagonal principal,

$$[\epsilon] \neq [\tilde{\epsilon}] \quad \text{y} \quad \epsilon_{1m} = \epsilon_{m1}$$

con lo que la energía se propagaría en espirales y no en línea recta, a partir de un punto.

Mas como los trabajos experimentales no han demostrado la imposibilidad de una propagación colineal de los vectores \vec{D} y \vec{E} , puede ser que el tensor $[\epsilon]$ sí sea simétrico con respecto a su diagonal principal,

$$[\epsilon] = [\tilde{\epsilon}]$$

o sea que $\epsilon_{1m} = \epsilon_{m1}$:

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{21}; \epsilon_{13} = \epsilon_{31}; \epsilon_{23} = \epsilon_{32}$$

por lo cual, sus coeficientes se reducirían a seis,

$$\epsilon_{11} \epsilon_{22} \epsilon_{33} \epsilon_{23} \epsilon_{31} \epsilon_{12}$$

El tensor $[\epsilon]$ puede referirse a sus componentes ortogonales y sus valores dependerán de esos ejes de referencia $x_1 x_2 x_3$ con respecto a los cristalográficos, pudiendo quedar sólo tres (*coeficientes principales*),

$$\epsilon_{11} \epsilon_{22} \epsilon_{33}$$

anulándose los demás. Así, hay una constante dieléctrica longitudinal ϵ_{11} , y otras dos transversas $\epsilon_{21} \epsilon_{31}$ perpendiculares a la anterior. Se mide ϵ_{11} sólo cuando E se dirige según el eje 1, y así las demás.

Para medir $[\epsilon]$ cuando \vec{E} tiene una dirección cualquiera $[uvw]$,

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} [\epsilon] \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

y en particular, el valor observado según $[100]$ es precisamente ϵ_{11}

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \epsilon_{11}$$

El valor según $[111]$ en un cristal cúbico, $|\epsilon| = \epsilon$, puesto que

$$u = v = w = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Representación geométrica de un tensor de 2o. orden. Para representar un tensor de 2o. orden en forma de superficie,

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} [a] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{con} \quad [a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

en donde $x_1 x_2 x_3$ son las componentes del vector en una referencia ortogonal, desde el origen hasta la superficie buscada que se llama indicatriz de la propiedad.

Teniendo en cuenta que $[a]$ es simétrico con relación a la diagonal principal,

$$[a] = [\bar{a}]$$

$$a_{12} = a_{21} ; a_{13} = a_{31} ; a_{23} = a_{32}$$

resulta,

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{31} x_3 x_1 + 2 a_{23} x_2 x_3 = 1$$

ecuación de una cuádrca centrada en la referencia ortogonal.

Si $[a]$ se reduce a su forma diagonal,

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$$

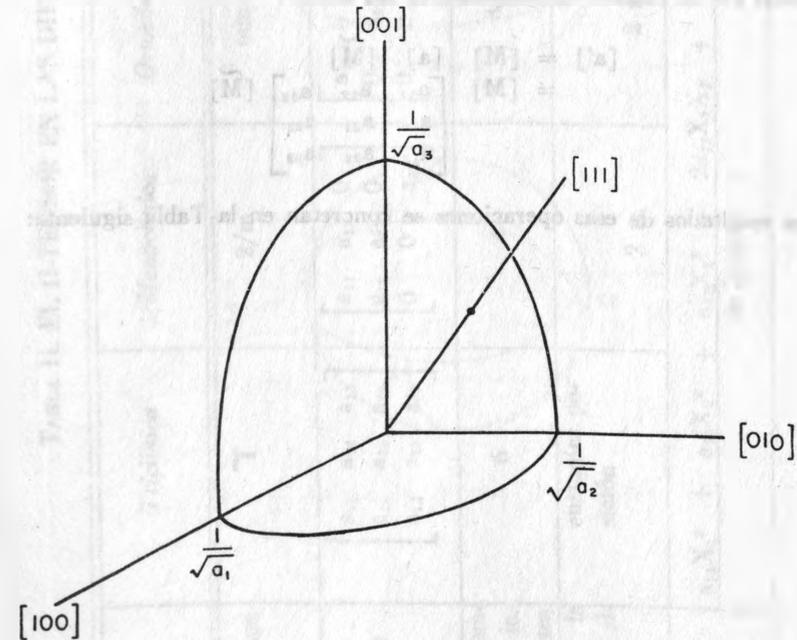


Figura 4. Semiejes de un elipsoide según sus ejes de referencia.

resulta la ecuación del elipsoide referido a sus ejes principales:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 1$$

que corresponde a la expresión usual en geometría analítica,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{c}\right)^2 = 1$$

con semiejes,

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1}}; \quad r_2 = \frac{1}{\sqrt{a_2}}; \quad r_3 = \frac{1}{\sqrt{a_3}}$$

Efecto de la simetría cristalina sobre un tensor de orden 2

Para indagar este efecto se ha de multiplicar la matriz M del elemento de un cristal por el cuadro de componentes del tensor:

$$\begin{aligned} [a'] &= [M] [a] [\tilde{M}] \\ &= [M] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} [\tilde{M}] \end{aligned}$$

Los resultados de esas operaciones se concretan en la Tabla siguiente:

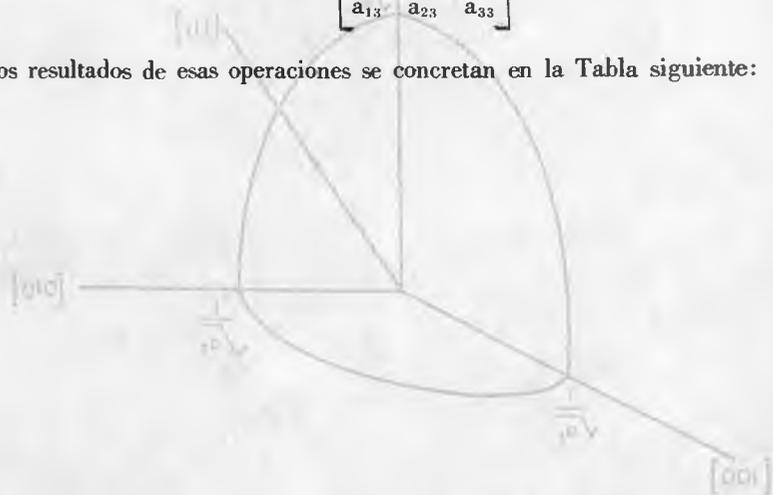


TABLA II. EL II-TENSOR EN LAS DIFERENTES SINGONIAS

Singonías	Gr. de Laue	Triclinica	Monoclinica	Ortoclinica	Tetragonal Hexagonal Trigonal	Cúbica
II. Tensor		T	2/m	mmm	4/mmm 6/mmm 3m	m3m
Núm. de componentes independientes		6	4	3	2	1
Ejes de la cuadrática situados en		cualquier posición	2 m	2 m	3 4 ó 6	Ninguno
Elipsoide		$a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + 2a_{12}X_1X_2 + 2a_{13}X_1X_3 + 2a_{23}X_2X_3 = 1$ de 3 ejes	$a_{11}(X_1^2 + X_2^2) + a_{33}X_3^2 = 1$ de revolución	$a_{11}(X_1^2 + X_2^2) + a_{33}X_3^2 = 1$ de revolución	$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1$ esfera	

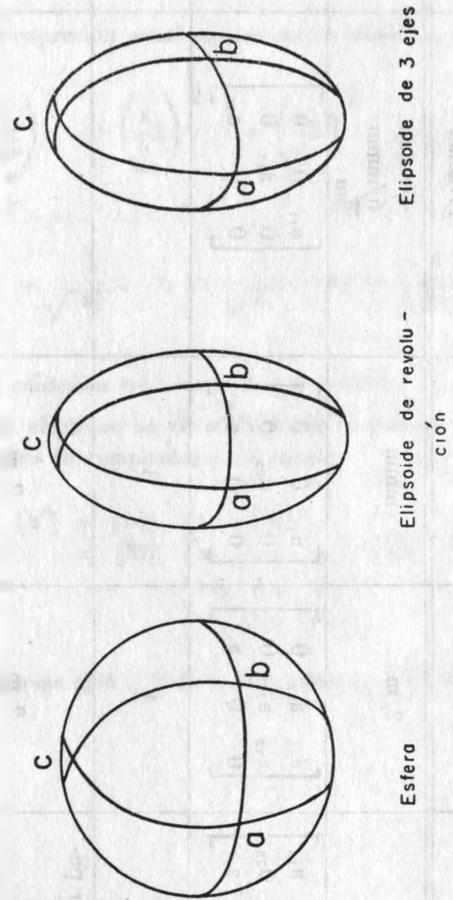


Figura 5. Tipos de elipsoide con los que se representa la mayoría de las propiedades cristalográficas.

PROPIEDADES MECANICAS DE LOS CRISTALES

Elasticidad es el comportamiento de los cristales ante las fuerzas de compresión o expansión a que se les sometan.

Los edificios reticulares de las sales, p. ej., están constituidos por iones (átomos cargados por pérdida o adquisición de electrones), cuyas cargas eléctricas se equilibran entre sí de modo que el conjunto aparece neutro: ellas son las responsables de la construcción reticular. Las fuerzas de atracción son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia de los centros de gravedad de los iones (Ley de Coulomb). Para que el equilibrio se mantenga deben existir otras fuerzas repulsivas que crezcan más rápidamente con la disminución de distancias entre los centros de gravedad. Estas fuerzas repulsivas (de Born) citadas, son proporcionales a las potencias 9a. a 11a. de la distancia.

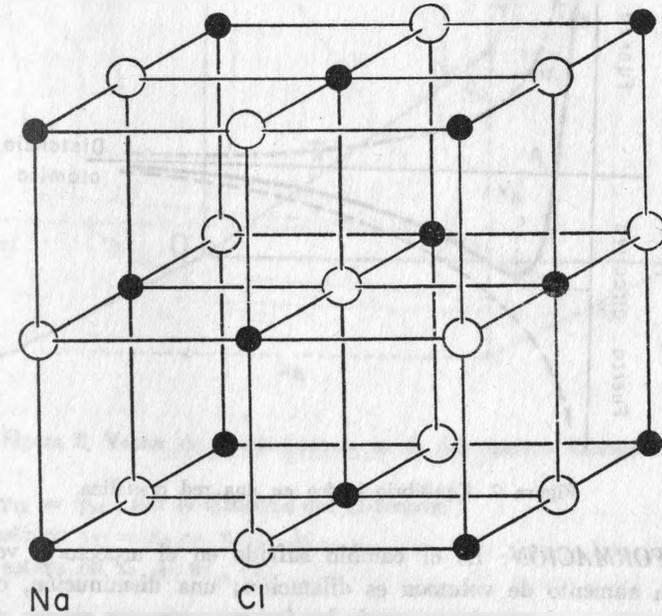


Figura 6. Constitución reticular de la Halita.

Sobre la naturaleza de tales fuerzas se puede suponer que al aproximarse dos iones diferentes, se atraen electrostáticamente con energía, debido a sus capas electrónicas respectivas, y llegan a interpenetrarse parcialmente, hasta que ambos núcleos experimentan una repulsión por las fuerzas de Born; el equilibrio de esas dos fuerzas se logra a una distancia en la que la energía potencial se torna mínima.

Son de particular importancia las propiedades elásticas siguientes: deformación, exfoliación, corrimiento, fractura y dureza.

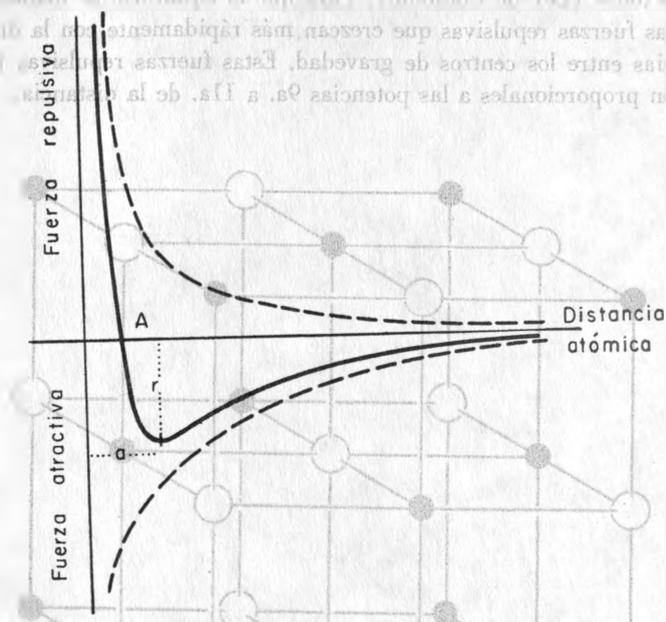


Figura 7. Equilibrio iónico en una red cristalina.

a. **DEFORMACIÓN:** Es el cambio sufrido en el aspecto y volumen del cristal. Un aumento de volumen es dilatación; una disminución, compresión. La deformación es *homogénea* cuando las fuerzas actuantes operan en todas direcciones; *heterogénea* si la fuerza se aplica en una sola dirección.

La *deformación homogénea* se obtiene por tracción o presión de igual intensidad en todas direcciones, por presión hidrostática, o también variando la temperatura (aumento o disminución). La dilatación térmica y la deformación homogénea suelen estudiarse juntas, dada la semejanza geométrica de sus efectos. (Cf. p. 120.)

En un cuerpo sometido a deformación homogénea, tres de sus puntos en

línea recta permanecen en ella después de la deformación: las líneas paralelas siguen siéndolo; las coplanares continúan situadas en el mismo plano.

El vector de desplazamiento \vec{u} de un punto dado, depende del de su vector de posición \vec{x} ,

$$\begin{aligned} u_1 &= \gamma_{11}x_1 + \gamma_{21}x_2 + \gamma_{31}x_3 \\ u_2 &= \gamma_{12}x_1 + \gamma_{22}x_2 + \gamma_{32}x_3 \\ u_3 &= \gamma_{13}x_1 + \gamma_{23}x_2 + \gamma_{33}x_3 \end{aligned}$$

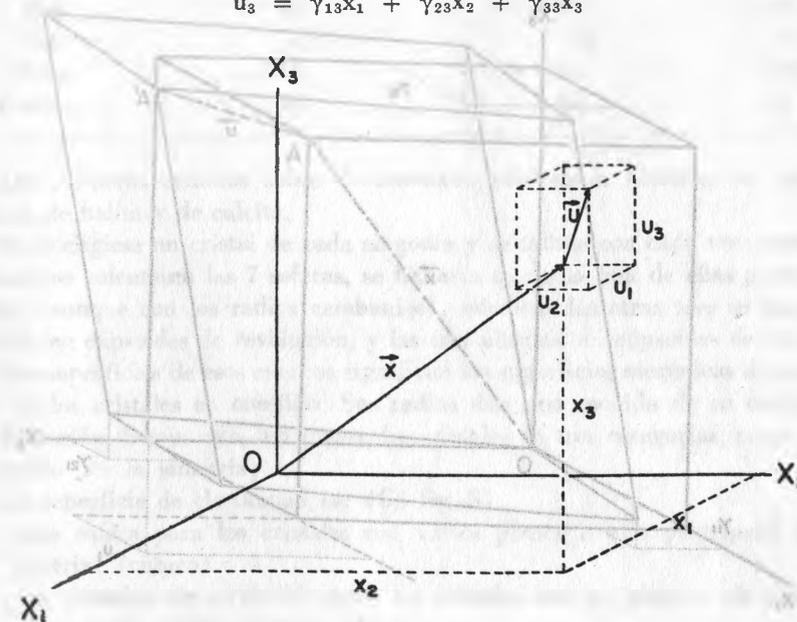


Figura 8. Vector de desplazamiento en la deformación homogénea.

en donde $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$, por la simetría del II-tensor.

Si A está en $x_1 = x_2 = x_3 = 1$

A' estará en $x_1 + u_1$, etc.

$$u_1 = \gamma_{11} + \gamma_{21} + \gamma_{31}$$

Un círculo se transforma en una elipse; una esfera, en elipsoide de tres ejes,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 + u_1 = x_1 + \gamma_{11}x_1 + \gamma_{21}x_2 + \gamma_{31}x_3 = (1 + \gamma_{11})x_1 + \gamma_{21}x_2 + \gamma_{31}x_3 \\ x_2 &= \gamma_{12}x_1 + (1 + \gamma_{22})x_2 + \gamma_{32}x_3 \\ x_3 &= \gamma_{13}x_1 + \gamma_{23}x_2 + (1 + \gamma_{33})x_3 \end{aligned}$$

resolviendo para x_1 , x_2 , x_3 y colocando esos valores en la ecuación de la esfera, resulta un elipsoide.

La dilatación térmica fue una de las primeras propiedades físicas estudiadas. Mitscherlich observó la alteración de los diedros del romboedro de calcita, por calentamiento.

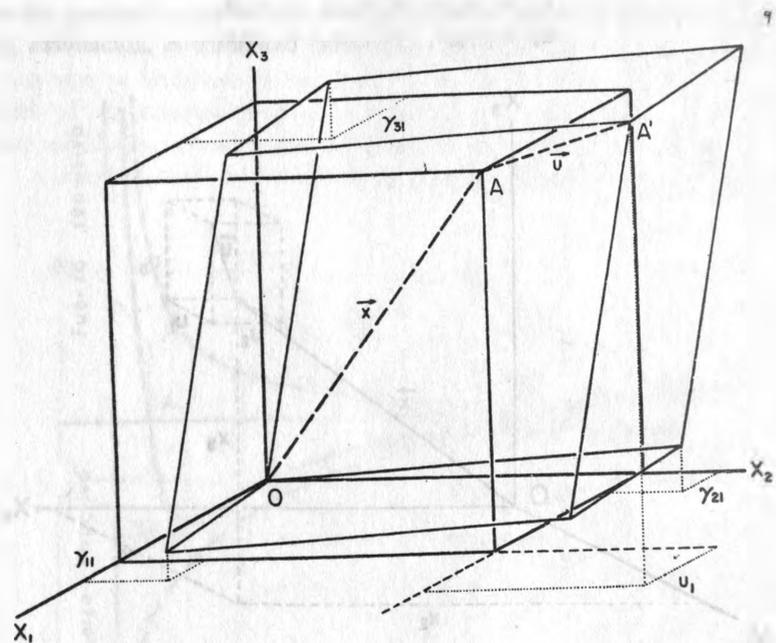


Figura 9. Deformación homogénea.

La Tabla III indica los coeficientes de dilatación en dirección de los ejes principales del elipsoide. En general, todas las relaciones cristalográficas entre índices de cara y de zona mantienen su validez en los cristales antes y después de ser sometidos a deformaciones homogéneas; no así las relaciones angulares. Hoy se estudia el efecto de esta deformación mediante el estudio de los fenómenos de difracción de los rayos X en el cristal: el desplazamiento de las líneas de un diagrama de polvo permite calcular las nuevas dimensiones reticulares.

La transición de una forma cristalina a otra se acompaña por discontinuidades en sus coeficientes de dilatación.

TABLA III. COEFICIENTES DE DILATACION EN DIRECCION DE LOS EJES PRINCIPALES DEL ELIPSOIDE

	γ_1	γ_2	γ_3
Cu	$17 \cdot 10^{-6}$	17	17
Cd	21	21	52
NaCl	40	40	40
BeO	5.3	5.3	5.1
Calcita	-566	-566	24.91
Cuarzo	14	14	9

Los primeros estudios sobre deformación plástica se hicieron en cristales iónicos de halita y de calcita.

Si se eligiese un cristal de cada singonía y se tallase con cada uno una bola, y luego se calentasen las 7 esferas, se hallaría que sólo una de ellas permanece esfera (aunque con los radios cambiados), mientras las otras tres se han convertido en elipsoides de revolución, y las tres últimas, en elipsoides de tres ejes.

Las superficies de esos cuerpos significan las superficies mecánicas de elasticidad de los cristales en cuestión. Sus radios dan una medida de su coeficiente de dilatación. Según esto, agrúpanse los cristales en tres categorías, como ya se ha hecho por la simetría:

La superficie de elasticidad es: (Cf. fig. 5).

- . una esfera para los cristales con varios planos o ejes principales de simetría; (cúbico)
- . un elipsoide de revolución para los cristales con un plano o eje principal de simetría. (Tetr., hexag., trig.)
- . un elipsoide de tres ejes para los cristales sin plano o eje principal de simetría. (Digonal.)

De seguir calentando el cristal se llega al límite de temperatura para la que ha sido posible la estabilidad del andamiaje reticular y en este momento se deshace repentinamente el edificio cristalino fundiéndose, esto es, pasando a un estado isótropo.

El punto de fusión de los cristales es fijo. El proceso inverso se llama solidificación.

La *deformación heterogénea* tiene lugar por acción unilateral de presión, tracción, flexión, . . . Puede ser duradera o instantánea.

El límite en el que se hace duradera la deformación de un cuerpo, se llama *límite de elasticidad*. —Antes del límite citado, rige la ley de Hooke expresada en 1678 en la forma: "Ut tensio sic vis", hay proporcionalidad entre las fuerzas y las deformaciones que producen.

Esta ley se cumple en los cuerpos amorfos por igual en todas direcciones, mientras en los cristalizados depende de un número variable de coeficientes según la dirección.

$$\lambda = A.P$$

A = coeficiente de elasticidad
P = variación de longitud

Técnicamente se escribe la fórmula recíproca $P = E.\lambda$, en donde

$$E = \frac{1}{A}$$

es el módulo de elasticidad. Es la tangente del ángulo de esa curva con el eje de abscisas.

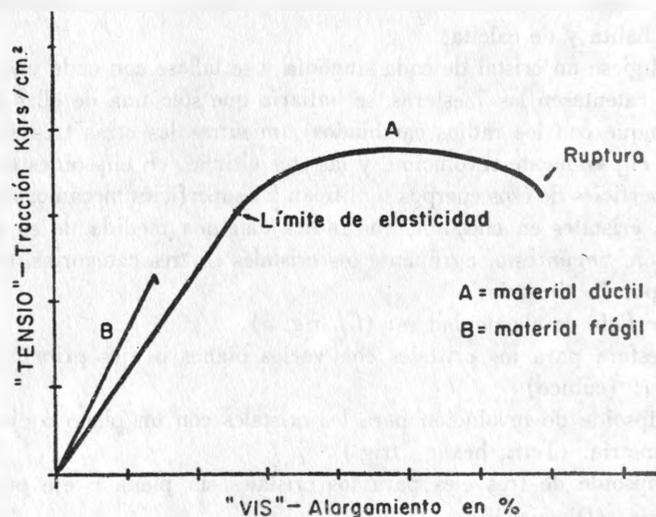
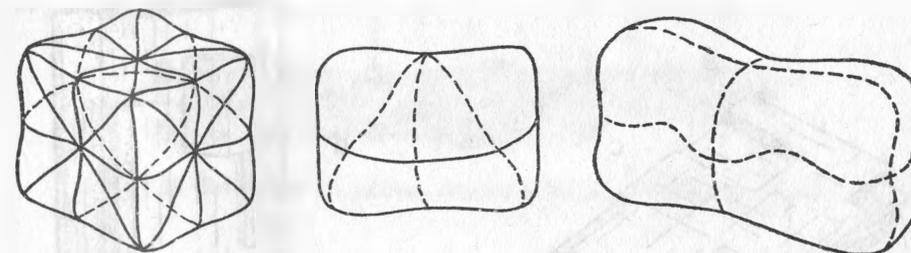


Figura 10. Comportamiento de una barra de acero, sometida a tracción.

Se ha pretendido apreciar la elasticidad de los cristales por la altura del sonido producido durante la vibración de placas talladas según direcciones definidas; o también por las figuras de Chladni que resultaban en ellas al vibrar, previamente espolvoreadas. Tienen diferencias de tono que pueden ser de más de una quinta, dos placas de cuarzo talladas paralelamente a las caras de los romboedros $10\bar{1}1$ y $0\bar{1}\bar{1}1$.

Las diversas direcciones de un cristal se comportan de modo diverso en la deformación heterogénea; las simétricas y las paralelas, de modo análogo (consecuencia de los coeficientes de elasticidad antes citados).

—Si se tallan, p. ej., bastoncillos con igual sección de un cristal de sal (NaCl), según las diversas direcciones posibles; y se someten esas barritas a tracciones iguales por un extremo hasta que se rompan, se podrá observar que las barritas de distintas direcciones se rompen con distinto peso. Si se colocan esas unidades de peso como unidades de longitud a partir de un punto y en las direcciones respectivas de las barritas talladas, uniendo sus extremos mediante una superficie, se obtendrá la *superficie de elasticidad* correspondiente a la deformación heterogénea. La superficie de la sal representada en la Fig. 11 deja adivinar la simetría de un cristal regular. De igual modo se establece la superficie de un cristal romboédrico de espato de Islandia, de uno ortoclínico de baritita.



HALITA - NaCl

CALCITA - CaCO₃

BARITITA - BaSO₄

Figura 11. Superficies de elasticidad de tres especies mineralógicas.

b. *EXFOLIACION*: Por exfoliación se entiende la propiedad de los cristales de dejarse separar según superficies planas. La tracción para producir exfoliación es unilateral y así se comporta el cristal de distinto modo según sus diversas direcciones.

El cristal se romperá más fácilmente cuando se le estire en la dirección de la mínima cohesión relativa. La superficie de exfoliación será perpendicular a esa dirección y como las direcciones paralelas son de igual valor, dicha superficie de exfoliación deberá ser un plano.

La perfección de la exfoliación no depende de la cohesión absoluta, sino que será tanto más perfecta cuanto más diferencia haya entre la cohesión de dos direcciones. Ej.: el diamante y la fluorita se exfolian bien, pero se necesita una fuerza mucho mayor para exfoliar el primero que para la segunda.

Las superficies de exfoliación tienen estrecha relación con la constitución molecular de los cristales y deben cumplir también el principio de la racionalidad de los parámetros, esto es, deben ser caras posibles. También deben satisfacer las exigencias de la simetría y por eso se exfolia un cristal según caras de alguna forma de la misma clase. Sin embargo, no es posible caracterizar la pre-

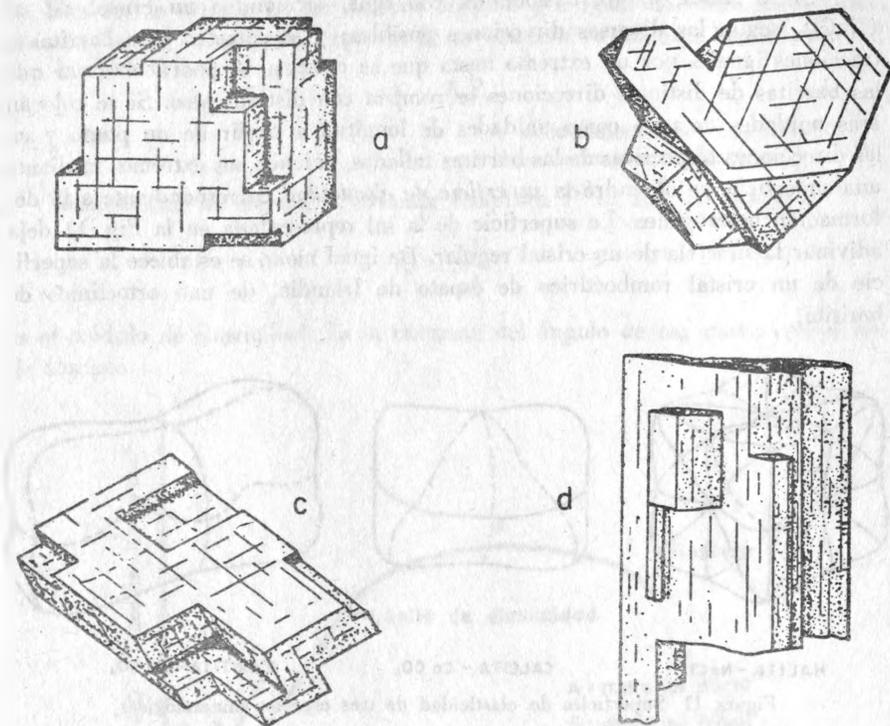


Figura 12. Varias formas de exfoliación: a — cúbica, b — octaédrica, c — romboédrica, d — prismática.

sencia o ausencia de un centro de simetría por medio de la exfoliación: ésta es una propiedad *centrosimétrica*. En caso de presentar un cristal cierto número de direcciones de exfoliación no equivalentes, es posible distinguir 11 grupos de clases de simetría, llamados *grupos de Laue*.

La notable diferencia entre la exfoliación de los piroxenos (augitas) y anfíboles (hornblenda) es una manifestación de las características estructurales de ambas clases de sustancias. Todas ellas se exfolian según (110). En un corte perpendicular al eje *c*, forman los cruceros de augita un ángulo de 87° y los de hornblenda de 124° .

Este carácter de exfoliación es de gran importancia para su identificación en el análisis de las preparaciones microscópicas.

La sal común se exfolia según el cubo (100), el espato de Islandia según el romboedro (1011), la baritita según el pinacoide, de preferencia (001), menos según el prisma (110), y menos aún según el otro pinacoide (010).

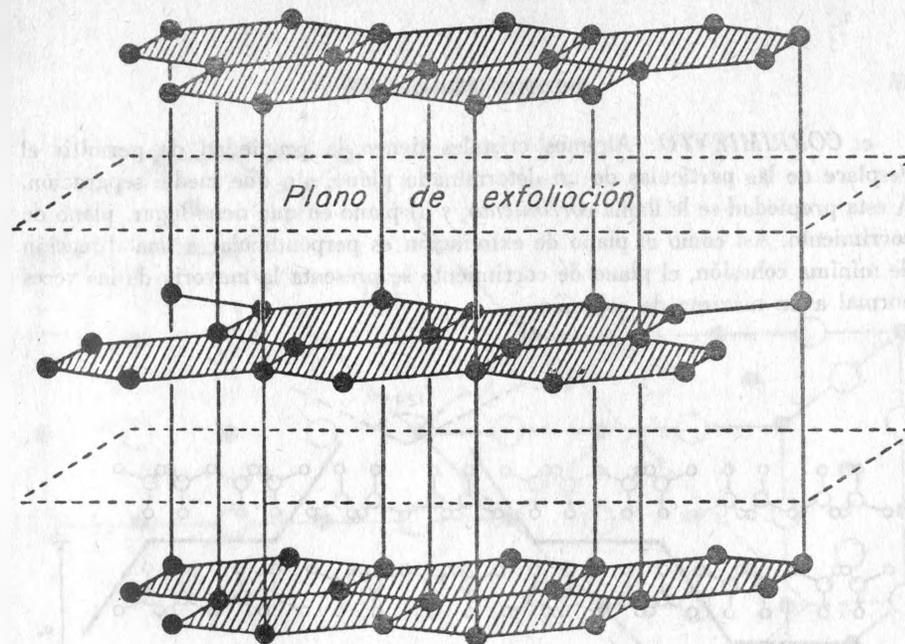


Figura 13. Exfoliación del grafito, paralela a los planos reticulares (00[#]1).

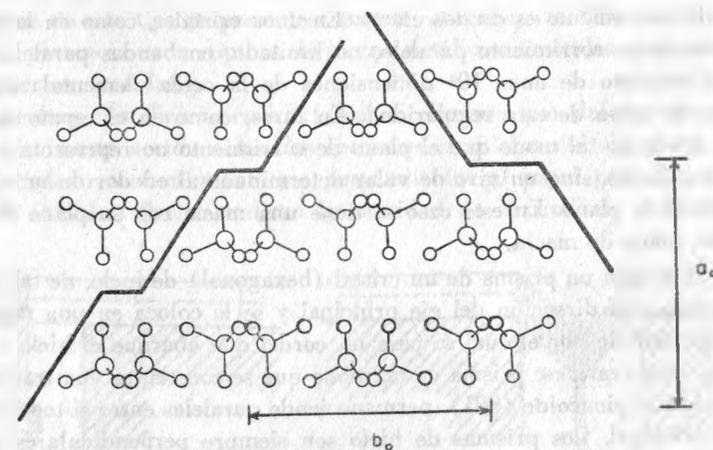
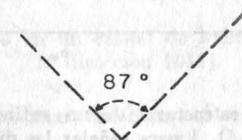


Figura 14. Proyección de la red estructural de un piroxeno, según su eje *c*. Únicamente se indican las cadenas $[\text{SiO}_3]$ para demostrar sus direcciones de exfoliación.

c. **CORRIMIENTO:** Algunos cristales tienen la propiedad de permitir el desplace de las partículas de un determinado plano, sin que medie separación. A esta propiedad se le llama *corrimento*, y al plano en que tiene lugar, plano de *corrimento*. Así como el plano de exfoliación es perpendicular a una dirección de mínima cohesión, el plano de *corrimento* se presenta la mayoría de las veces normal a un máximo de cohesión.

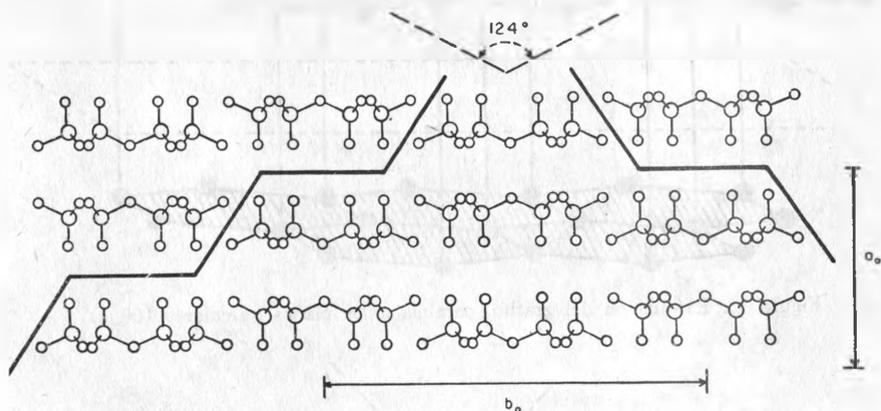


Figura 15. Proyección de la red estructural de un anfíbol, según su eje C. Únicamente se indican las cadenas $[Si_4O_{11}]$ para señalar las direcciones de exfoliación.

El *corrimento* es de dos clases. En unos cristales, como en la estibinita y el hielo, es un *corrimento* paralelo, no limitado, en bandas paralelas a planos de deslizamiento de unas 10^4 dimensiones de la celda elemental: no se entiende bien la causa de esta regularidad. En otros, como en el espato de Islandia, es un desvío de tal modo que el plano de *corrimento* no representa una traslación de moléculas, sino un giro de valor determinado alrededor de un eje yacente en el referido plano. En este caso se tiene una macla con su plano de *corrimento* como plano de macla.

Si se talla un prisma de un cristal (hexagonal) de hielo, de tal modo que sea paralelo a la dirección del eje principal y se le coloca en una madera provista de un orificio por el cual se pasa un cordel que abarque el hielo y sostenga un peso, se curvará ese prisma de tal modo que se constatará una traslación lamelar paralela al pinacoide (001), permaneciendo paralelas entre sí todas las partes del eje principal. Los prismas de hielo son siempre perpendiculares a la superficie libre.

A tal traslación se ha referido el movimiento de progresión de los glaciares.

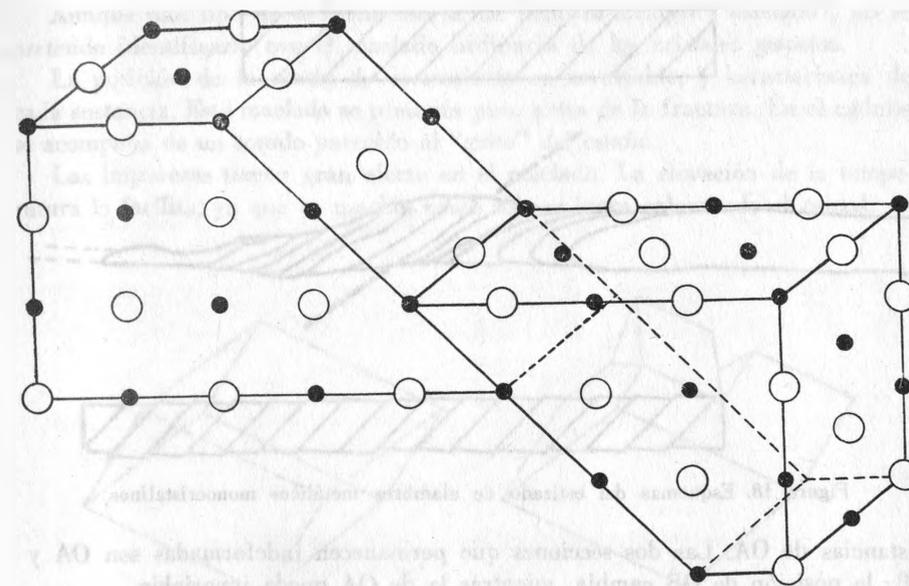


Figura 16. Macla de *corrimento* en un cristal de halita ($NaCl$) por el plano (011) en la dirección [011].

Al mismo fenómeno obedece también el alargamiento de los alambres metálicos de monocristal. Las barras de Cd o de Zn se dividen en placas no perpendiculares al eje de la barra: ésta se aplana y estrecha al estirarse.

Orientaciones de este tipo se presentan durante el trabajo en frío de los metales. Son de importancia en la ruptura de piezas metálicas sometidas a continuos y grandes esfuerzos: por fatiga.

Como una esfera cristalina se convierte en un elipsoide por deformación, es conveniente referir esta acción a las dos secciones circulares del elipsoide. Supóngase que el plano de *corrimento* sea perpendicular al papel y la dirección de *corrimento* OA. Las flechas indican la cantidad de *corrimento* a diversas

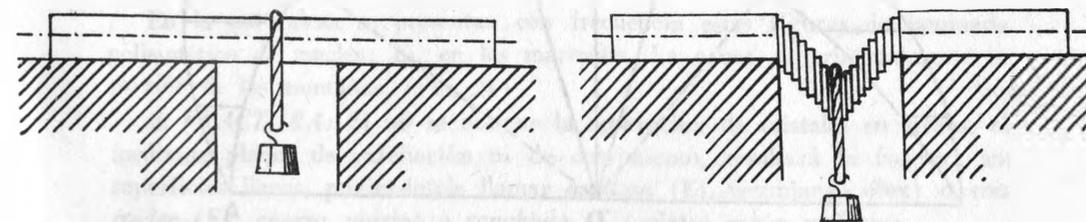


Figura 17. *Corrimento* en un prisma de hielo, perpendicular a su eje [001].

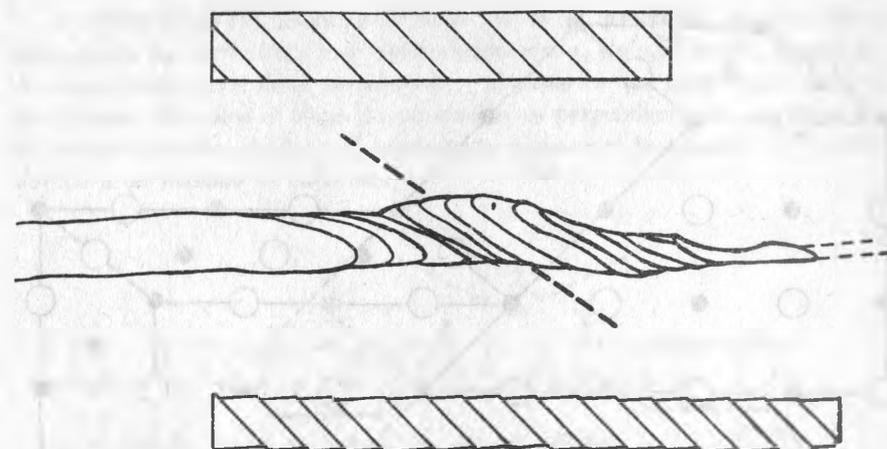


Figura 18. Esquemas del estirado de alambres metálicos monocristalinos.

distancias de OA. Las dos secciones que permanecen indeformadas son OA y OB: la posición de OB cambia, mientras la de OA queda invariable.

Si se apoya un cuchillo sobre un diedro obtuso de un romboedro de exfoliación de espato de Islandia, y se ejerce una presión en sentido vertical, se desplazará hacia el triedro c una parte del romboedro de tal modo que quedará en posición de macla con respecto al resto del cristal. El corrimiento se hizo por la cara (0112) en la dirección 0111. Los ejes principales de ambas partes del cristal no son mutuamente paralelos, sino que forman un ángulo de $63^{\circ}45'$ entre sí.

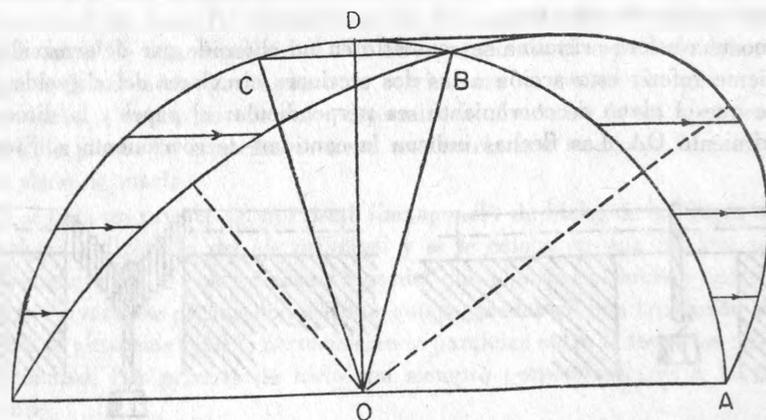


Figura 19. Deformación de un círculo en una elipse.

Aunque este tipo de deformación se ha llamado siempre “maclado”, no se pretende identificarlo con el maclado ordinario de los cristales gemelos.

La posición de la macla de corrimiento es invariable, y característica de cada sustancia. Este maclado se presenta poco antes de la fractura. En el cadmio se acompaña de un sonido parecido al “grito” del estaño.

Las impurezas tienen gran efecto en el maclado. La elevación de la temperatura lo facilita, ya que en muchos casos sólo se logra calentando el cristal.

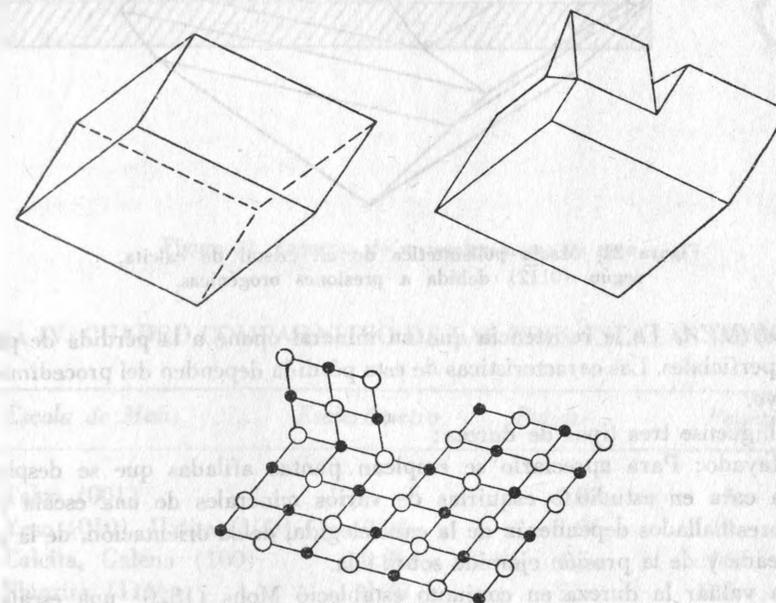


Figura 20. Macla de corrimiento en un cristal de calcita (CaCO_3). La figura inferior representa el desplazamiento de la red.

En la naturaleza se presentan con frecuencia estas figuras de laminado polisintético de maclas: Ej. en los mármoles. La causa es principalmente la presión de las montañas. (Fig. 21).

d. **FRACTURA**: Si no se obtiene la separación de cristales en trozos, ni mediante planos de exfoliación ni de corrimiento, resultará la fractura sin superficies llanas, pudiéndosele llamar *astillosa* (Ej. vesubiana, sílex) o *concoidea* (Ej., cuarzo, vidrio) o *ganchuda* (Ej., plata) según su forma.

La fractura es muy característica para algunos minerales.

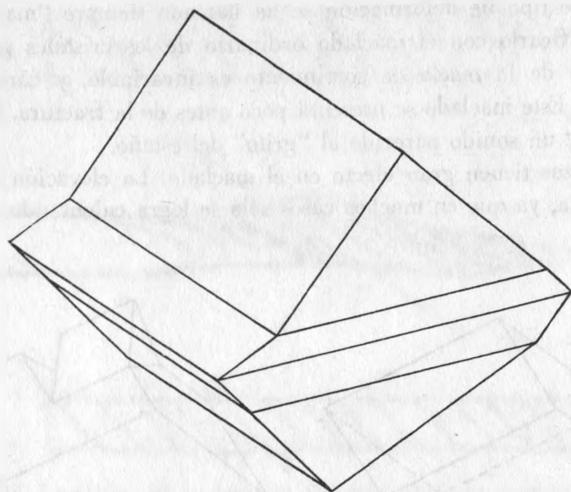


Figura 21. Macla polisinéctica de un cristal de calcita, según (0112) debida a presiones orogénicas.

e. **DUREZA:** Es la resistencia que un mineral opone a la pérdida de partículas superficiales. Las características de esta pérdida dependen del procedimiento de ensayo.

Distínguense tres tipos de dureza:

1. **Rayado:** Para apreciarlo se emplean puntas afiladas que se desplazan sobre la cara en estudio o esquirlas de varios minerales de una escala tipo. Los valores hallados dependerán de la cara elegida, de su orientación, de la punta empleada y de la presión ejercida sobre ella.

Para valuar la dureza en conjunto estableció Mohs (1820) una escala de 10 minerales:

1. Talco	$H_2 Mg_1 Si_4 O_{12}$	6. Ortosa	$KAlSi_3 O_8$
2. Yeso	$CaSO_4 \cdot 2 H_2O$	7. Cuarzo	SiO_2
3. Calcita	$CaCO_3$	8. Topacio	$Al_2SiO_4 (F, OH)_2$
4. Fluorita	CaF_2	9. Corindón	Al_2O_3
5. Apatito	$Ca_5 (PO_4)_3F$	10. Diamante	C

Esta escala permite ordenar los cristales tan sólo de modo aproximado. Para determinaciones exactas de la dureza se emplean instrumentos apropiados llamados esclerómetros (Seebeck, 1833).

2. **Pulido:** Se frota el mineral con unos abrasivos determinados (Rosiwal, 1896).

3. **Penetración:** Se presiona el cristal con un percutor (Brinell, Vickers) terminado en esfera o en prisma, hasta cierta profundidad.

Comparando los datos de dureza obtenidos mediante un esclerómetro con los hallados por la Escala de Mohs, se ve que ésta sólo es aproximada y no guarda proporcionalidad entre sus divisiones.

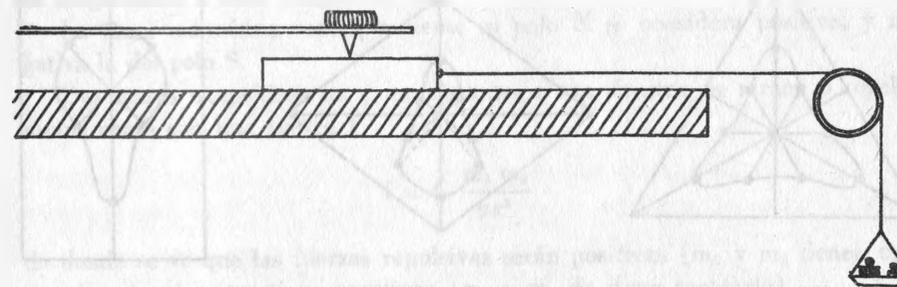


Figura 22. Esquema de un esclerómetro de raya.

TABLA IV. CUADRO COMPARATIVO DE LAS TRES ESCALAS DE DUREZA

Escala de Mohs	Esclerómetro	Pulido	Penetración
1. Talco (001)	—	0.03	5
2. Yeso (010), Halita (100)	0.04	1.25	14
3. Calcita, Galena (100)	0.26	4.5	96
4. Fluorita (111)	0.75	5	106
5. Apatito, Scheelita (111)	1.23	6.5	237
6. Ortosa, Magnetita (111)	25	37	253
7. Cuarzo (1011)	40	120	270 (900*)
8. Topacio (001)	152	175	525 (1300*)
9. Corindón (1120)	1000	1000	1150 (2100*)
10. Diamante, TiC (100)	—	140000	2500

* Dureza de Vickers

Para la determinación de la dureza debe tenerse en cuenta la dirección de la raya en la cara, pues variará su valor con ella. Se ve, p. ej., en la cara (100) de un cristal de distena (triclínica) que en una dirección tiene dureza 5 y en la perpendicular 7.

La llamada *curva de dureza* se obtiene determinando la dureza de varias direcciones en una cara del cristal, y llevando esos valores, traducidos a segmentos proporcionales, paralelamente a partir de un punto. Si se unen todos los extremos se tiene la figura deseada.

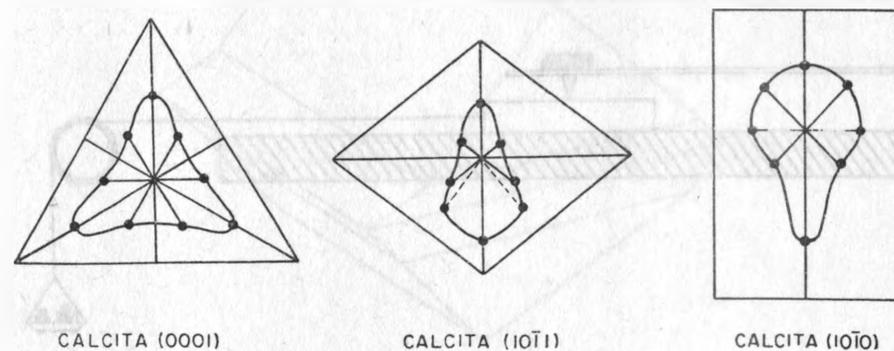


Figura 23. Curvas empíricas de dureza sobre caras determinadas.

Nociones fundamentales:

El valor de la fuerza de atracción o de repulsión magnética depende del grado de imantación de los imanes. Para su medida se introduce la noción de cantidad de magnetismo o masa magnética: m .

La masa magnética correspondiente al polo N se considera positiva, y negativa la del polo S.

Dos masas magnéticas m_1 y m_2 distantes r una de otra, se atraen o repelen mutuamente con una fuerza f

$$f = C \frac{m_1 m_2}{\mu r^2}$$

de donde se ve que las fuerzas repulsivas serán positivas (m_1 y m_2 tienen mismo signo) y las atractivas negativas (m_1 y m_2 de signo contrario).

C es coef. de proporcionalidad dependiente de la unidad elegida

El coeficiente μ se llama permeabilidad magnética del medio.

Para el vacío se admite $\mu = 1$.

Los cuerpos que tienen $\mu > 1$ se llaman paramagnéticos.

Los cuerpos que tienen $\mu < 1$ se llaman diamagnéticos.

En la mayoría de los cristales μ difiere muy poco de la unidad (en su 5a. ó 6a. cifra decimal).

En los llamados ferromagnéticos, es del orden de 3000, variable y dependiente de la intensidad del campo.

El campo magnético es el espacio en donde se manifiestan los fenómenos magnéticos.

La intensidad \vec{H} del campo magnético es la fuerza que ejerce la unidad de masa magnética positiva. La unidad de medida es el gauss o intensidad que actúa sobre una unidad CGS de masa magnética con la fuerza de una dina.

La intensidad \vec{H} es una magnitud vectorial (de dirección definida). Polo norte del imán es el centro de gravedad de todas las masas magnéticas posi-

vas; polo sur el de las masas negativas. La polarización magnética M o momento magnético de un imán es la suma $\sum m_i a_i$ en la que m_i es una masa magnética infinitamente pequeña (positiva o negativa) distribuida en todos los puntos del imán, y a_i la distancia de tales puntos a un plano cualquiera perpendicular a la dirección a .

El momento magnético de M de un imán o polarización magnética según la línea NS que une sus polos, se llama momento magnético principal.

La polarización magnética según otra dirección cualquiera es igual al momento principal por el coseno del ángulo que forme ésta con la dirección NS.

Inducción magnética \vec{B} . Al colocar un cuerpo cualquiera en un campo de intensidad H , se imanta.

Cuando un cuerpo colocado en el campo magnético sea de forma alargada y pueda girar para orientarse, se colocará en sentido \parallel NS si es paramagnético, y \perp NS de ser diamagnético.

La polarización magnética M depende de la intensidad \vec{H} del campo magnético, de modo que,

$$\vec{M} = \chi \vec{H}$$

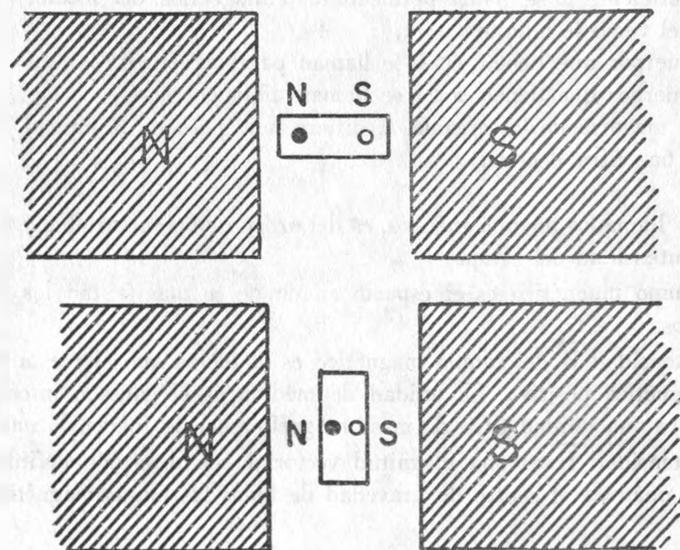


Figura 24. Orientación de una barra en un campo magnético a — paramagnética; b — diamagnética.

El coeficiente χ se llama coeficiente de imantación o susceptibilidad magnética del cuerpo en cuestión. En los cuerpos paramagnéticos la susceptibilidad es positiva y en los diamagnéticos, negativa.

Hay sustancias para las que χ es positivo y relativamente grande, dependiendo siempre de \vec{H} : son los cuerpos ferromagnéticos, de fuerte imantación: acero, hierro, níquel, cobalto, magnetita Fe_3O_4 , pirrotita $FeS.nS$.

Otras sustancias tienen χ positivo o negativo, relativamente pequeño y constante: tales cuerpos son débilmente magnéticos.

Entre los valores μ y χ existe la dependencia $\mu = 1 + 4\pi\chi$ y el campo total en el cuerpo resulta,

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} = \vec{H} + 4\pi\chi \vec{H} = (1 + 4\pi\chi) \vec{H} = \mu \vec{H}$$

En un cristal, \vec{B} no suele tener la misma dirección que \vec{H} sino relacionarse con ésta mediante un II-tensor,

$$B_1 = \mu_{11} H_1 + \mu_{21} H_2 + \mu_{31} H_3, \text{ etc.}$$

con $\mu_{ik} = \mu_{ki}$.

De mediciones precisas de los coeficientes anteriores resulta:

1. Algunos cristales de la simetría cúbica son magnéticamente isotropos, y otros anisotropos pero con direcciones de isotropía según los ejes ternarios. En éstos resultan unas superficies magnéticas análogas a las vistas en la deformación elástica heterogénea; no elipsoides: Ej., magnetita, alumbre, pirita, cobaltita, cobre, sal gema, fluorita.

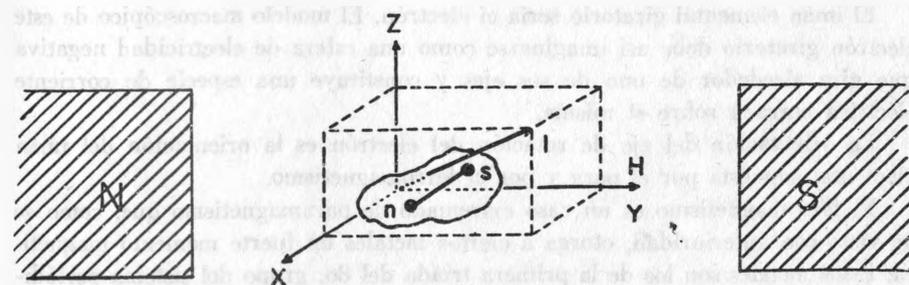


Figura 25. Orientación que toma un cristal anisótropo en un campo magnético N-S

H intensidad del campo
I vector de intensidad de imantación
n-s posición transversa adoptada por el cristal.

2. Los cristales de otras singonías son magnéticamente anisótropos, varía con la dirección.
3. Entre los minerales estudiados unos son paramagnéticos ($\chi < 0$) y otros diamagnéticos ($\chi > 0$).

Como valores extremos se han hallado,

- . en augita $\chi = + 931.0 \cdot 10^{-7}$
- . en adularia $\chi = 71.2 \cdot 10^{-7}$
- . en zircón hay direcciones de paramagnetismo y otras de diamagnetismo.

Teoría del magnetismo en los cristales

El movimiento de rotación de los electrones atómicos alrededor del núcleo produce unas corrientes elementales, verificadas por el descubrimiento y estudio cuantitativo de dos debísimos efectos magnetomecánicos (efectos giromagnéticos):

- 1o. Si se imanta longitudinalmente un cilindro de hierro, éste recibe una impulsión que tiende a hacerlo girar alrededor de su eje, es decir, alrededor de la dirección del vector magnetizante (efecto Einstein y de Haas);
- 2o. Un cilindro de hierro que gira rápidamente alrededor de su eje resulta débilmente imantado; el vector magnetizante es también paralelo al eje de rotación (efecto Barnett).

El imán elemental giratorio sería el electrón. El modelo macroscópico de este electrón giratorio debe así imaginarse como una esfera de electricidad negativa que gira alrededor de uno de sus ejes y constituye una especie de corriente eléctrica cerrada sobre sí misma.

La orientación del eje de rotación del electrón es la orientación del imán elemental supuesta por el para y por el ferromagnetismo.

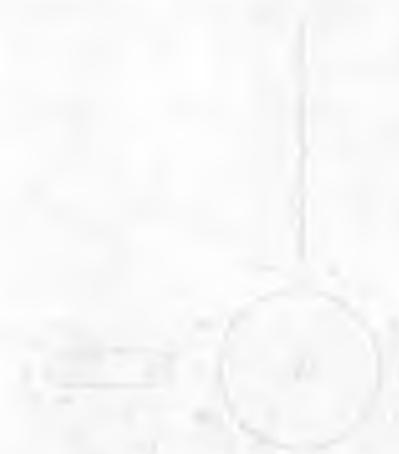
El ferromagnetismo es un caso extremado de paramagnetismo que, como se ha visto con anterioridad, otorga a ciertos metales un fuerte momento magnético. Estos metales son los de la primera triada del 8o. grupo del sistema periódico (Fe, Ni, Co). Se ha supuesto que la condición de existencia del enlace homopolar es que los electrones tengan "spin" antiparalelo; sin embargo, cuando dicho enlace es exclusivamente electrónico, que excluye toda acción del núcleo, la condición de estabilidad es la de tener "spin" paralelo. De modo que en un sistema de sólo electrones, éstos tienden a orientarse en forma paralela, acción

que origina el ferromagnetismo. La serie de condiciones requeridas para determinar el fenómeno, se halla exclusivamente en los citados metales.

Influencia del campo magnético en la cristalización

Se ha comprobado existir cierta influencia del campo magnético sobre la sustancia que cristaliza. Esta influencia se manifiesta obligando a los cristales que se forman en un campo magnético intenso a orientarse según determinada dirección. Los ejes cristalográficos forman un ángulo, específico para cada sustancia, con la dirección del campo exterior \vec{H} .

Además, la facies de los cristales varía según estas condiciones de formación. Se alargan en determinadas direcciones.



PROPIEDADES ELÉCTRICAS DE LOS CRISTALES

A. Inducción electrostática

Análogamente a la fórmula fundamental de la inducción magnética, se tiene aquí una semejante llamada ley de Coulomb:

$$f = C_e \frac{e_1 \cdot e_2}{\epsilon r^2}$$

f = fuerza mutua ejercida por dos masas eléctricas e_1 y e_2 a la distancia r .

ϵ = coeficiente (constante dieléctrica) que depende del medio. Para el vacío ($\epsilon = 1$).

C_e = coeficiente de proporcionalidad.

El valor de la constante dieléctrica ϵ depende del medio. En los medios isótropos es constante; en los anisótropos varía con la dirección. La noción de esta constante coincide con la de su análogo de permeabilidad magnética μ .

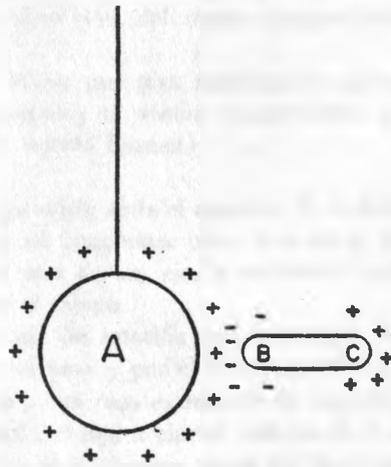


Figura 26. Electrización por influencia, de un cuerpo BC que se aproxima al campo eléctrico creado por la esfera A.

Una serie de masas eléctricas e_1, e_2, e_3, \dots en el espacio, crean en torno suyo un campo eléctrico de intensidad E .

Si en el campo eléctrico creado por una esfera electrizada positivamente se coloca un cuerpo cualquiera, se electrizará acumulando electricidad negativa en la superficie próxima a la esfera, mientras en la opuesta se la tendrá positiva.

Este fenómeno se llama de inducción electrostática, \vec{D} .

Los dipolos de un aislante (dieléctrico) isótropo colocado en un campo eléctrico E , tienden a orientarse: el cuerpo se polariza.

Así como para la polarización magnética $\vec{M} = \chi \vec{H}$, la polarización \vec{P} es proporcional a,

$$\vec{P} = \gamma \vec{E}$$

γ = factor de polarización o coeficiente de susceptibilidad eléctrica.

Con lo que,

$$\epsilon = 1 + 4\pi\gamma$$

El desplazamiento por inducción \vec{D} se determina por el campo eléctrico original y por la polarización:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \vec{E} + 4\pi\gamma\vec{E} = (1 + 4\pi\gamma)\vec{E} = \epsilon\vec{E}$$

No suele tener D la misma dirección que E en un cristal. Ambas cantidades se relacionan por un II-tensor,

$$D_1 = \epsilon_{11} E_1 + \epsilon_{21} E_2 + \epsilon_{31} E_3, \text{ etc.}$$

en donde $\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}$

El estudio cuantitativo del fenómeno de la inducción electrostática en los dieléctricos comprende: 1o. el valor de la constante dieléctrica (permeabilidad eléctrica) ϵ ; 2o. el valor de la susceptibilidad eléctrica γ .

Es de hacer notar que según la teoría de Maxwell, $\epsilon = n^2$ en donde n es el índice de refracción del medio para los rayos de gran longitud de onda, para los cuales permanece fija la constante dieléctrica ϵ .

Suelen corresponder en los cristales, grandes valores de ϵ con densidades elevadas, aunque poco se sabe de su relación con la estructura cristalina.

TABLA V. VALORES DE ϵ EN ALGUNOS CRISTALES

	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3
S	3.59	3.82	4.61
NaCl	5.85	5.85	5.85
Cuarzo	4.49	4.49	4.55
Calcita	8.48	8.48	8.03
BaSO ₄	7.62	12.25	7.63

En síntesis, son de recordar las siguientes analogías:

	Magnética	Eléctrica
Susceptibilidad	χ	γ
Permeabilidad	μ	ϵ
Dependencia de ambas	$\mu = 1 + 4\pi\chi$	$\epsilon = 1 + 4\pi\gamma$

Se conoce con bastante detalle el valor de χ en muchos cristales. Es de suponer que los valores de γ se alteren de modo análogo. Son pertinentes a este respecto las siguientes observaciones:

- El valor de ϵ varía entre 3.28 (ác. cítrico [001]) y 1.73 (rutilo [001]) en los cristales estudiados.
- Refiriéndose al SiO₂, el valor de ϵ es más elevado en los cristales que en la sustancia amorfa:

Para el cuarzo	$\epsilon = 4.27$ a 5.06
„ cuarzo fundido	$\epsilon = 3.20$ a 3.78

- La dirección de polarización P no coincide generalmente con la dirección de inducción del campo eléctrico E, en medio anisótropo.
- Si la dirección E coincide con un eje de simetría (excepto binarios de reflex) la dirección de polarización P coincide con E.
- En la singonía monoclinica existen tres ejes principales de inducción eléctrica, perpendiculares entre sí, de modo que si la intensidad E tiene lugar según uno de ellos, la polarización P coincide con él. Uno de estos ejes principales lleva dirección [010] y los otros dos yacen en el plano [010] variando su posición en él con la temperatura y con la presión (distinta para las diversas sustancias, como ocurre con el elipsoide óptico).

B. Conductibilidad eléctrica

Conductibilidad eléctrica es la propiedad de los cuerpos de permitir el paso de la corriente eléctrica.

La ecuación fundamental en el estudio de los fenómenos debidos al paso de la corriente es,

$$I_0 = \frac{e_0}{t} = \sigma$$

expresando que la conductibilidad eléctrica específica es igual a la intensidad de la corriente, o cantidad de electricidad que pasa por unidad de tiempo.

El valor ρ , inverso de σ , se llama *resistividad* o *resistencia específica* que es la conocida ley de Ohm, $R.I = E$.

Conductores eléctricos

Distínguese dos variedades:

- Sustancias de conducción metálica o electrónica,
- Sustancias de conducción iónica.

= Conducción electrónica

Respecto a la primera, se supone que la conducción, tanto eléctrica como térmica, es debida a los electrones "libres" de los metales, que se mueven en el reticulado de los cationes prácticamente fijos, comportándose como moléculas de un gas perfecto. Según la teoría cuántica, la conducción electrónica sólo es posible en bandas (zonas de Brillouin) que se solapan parcialmente en los buenos conductores (metales).

En los semiconductores, algunos electrones de valencia pueden recibir energía adicional por aumento de temperatura o radiación y pasan a electrones libres. Tal sería el caso, p. ej., del Fe₃O₄ en donde un electrón de valencia puede cambiar de un ión a otro:



Aplicaciones: a/ cristales rectificadores. Reemplazando algunos átomos de Ge tetravalente en un cristal de germanio puro, por átomos de Sb pentavalente

o de Al trivalente, el cristal se vuelve semiconductor. Habrá electrones libres o huecos según el caso, pero que se desplazan en direcciones opuestas.

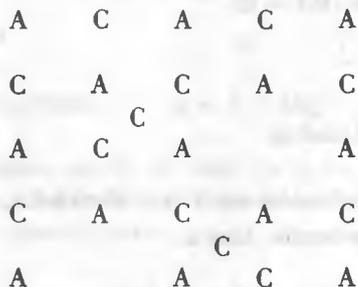
b/ transistores.

= *Conducción iónica*

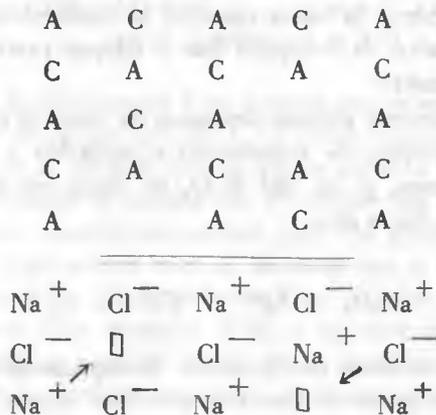
Los cristales transparentes suelen ser eléctricamente aislantes; sin embargo, algunos presentan cierta conducción iónica semejante a la electrolítica, gracias a espacios que como red de canales atraviesan a la estructura. Estos espacios desocupados se llaman defectos, huecos o vacantes:

1. Vacantes de Frenkel, provocadas por iones que abandonan sus lugares reticulares y pasan a ocupar posiciones intersticiales.

Es el caso del 1% de los iones en cristales de AgCl. Su densidad no varía.

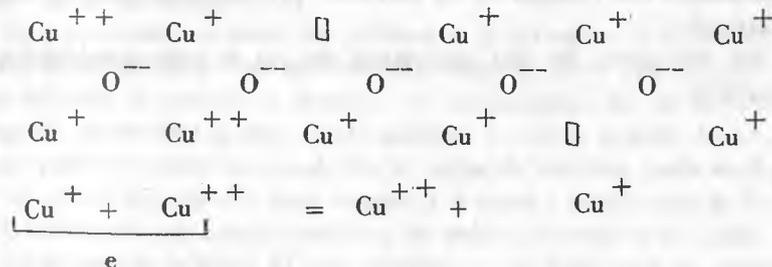


2. Vacantes de Schottky, debidas a iones que abandonan sus posiciones reticulares. Esta clase de defectos se dan en los haluros alcalinos en proporción 1:10000, disminuyendo su densidad.



Hay ocasiones en que la movilidad catiónica es más fácil, y por lo tanto mayor también su conductibilidad: es el caso de α - AgI. El retículo de esta sal está formado por los iones iodo en red cúbica centrada, y en los 42 intersticios se alojan los 2 iones Ag⁺ sin puesto fijo. La movilidad de estos últimos aclara la conductibilidad del α - AgI.

Al lado de la conductibilidad iónica, en muchos cristales coexiste también la electrónica debida a probables desviaciones de la composición estequiométrica normal; p. ej., en el equilibrio metal-oxígeno de los óxidos. (Cu₂O):



C. *Producción de cargas eléctricas*

Ciertos cristales que pueden provocar por sí mismos la aparición de cargas eléctricas.

Las causas que pueden provocar tal liberación de electricidad, son:

1. *Frotamiento*: triboelectricidad. Guezejus estudió el fenómeno en una serie de minerales y observó que su dureza decrece del más electropositivo al más electronegativo.

Al frotarlos se cargan + los dos primeros y - los siguientes.

- (+) diamante (dureza 10)
- topacio (d = 8)
- crystal de roca (d = 7)
- vidrio ordinario (d = 5)
- mica (d = 3)
- calcita (d = 3)
- azufre (d = 2)
- (-) cera (d < 1)

2. *Deformación mecánica*: p. ej., presión o tracción: piezoelectricidad. (Cf. p.126)

3. *Cambio de temperatura*: (calentamiento o enfriamiento): piroelectricidad. (Cf. p.55)

4. *Iluminación*: desde el infrarrojo al ultravioleta. En unos casos, como en el cristal de roca, las cargas que produce por la luz se distribuyen como las piroeléctricas por enfriamiento: los más activos son los rayos infrarrojos. La electricidad producida entonces se llama actinoelectricidad.

En otros casos, como en las variedades coloreadas de fluorita (particularmente la verde) las cargas eléctricas son producidas como en la piroelectricidad, por calentamiento: los más activos son los rayos ultravioleta. La electricidad producida se llama fotoelectricidad.

5. *Calentando* dos cristales en su contacto (par termoelectrico) se obtiene termoelectricidad.

De estos fenómenos, los más importantes son los de piezoelectricidad y de piroelectricidad.

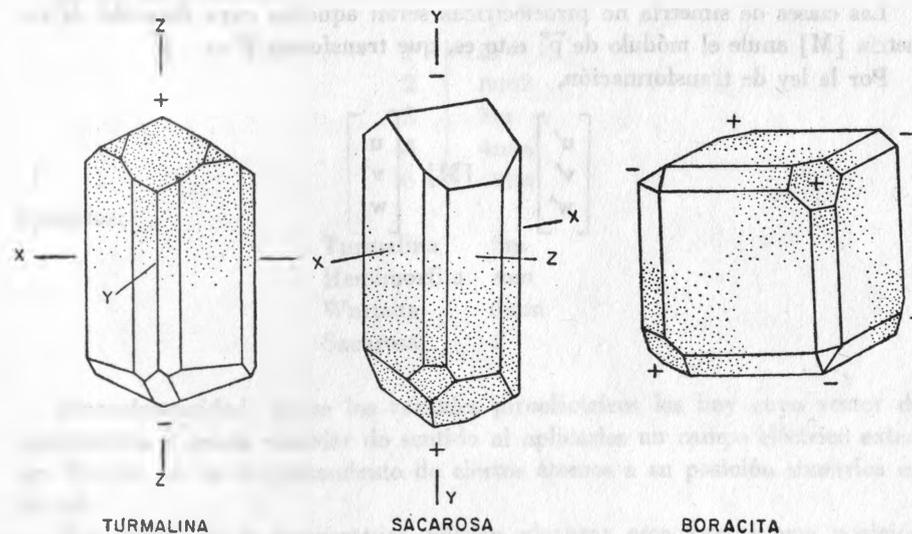
PIROELECTRICIDAD

La piroelectricidad es una forma de electricidad que aparece en los cristales al hacer variar su temperatura.

Esta propiedad fue observada primero en la turmalina (trig. hemimf.).

Si se calienta un cristal de turmalina (Figs. 27, 28 y 29) se puede observar que mientras se procede a elevación de temperatura, uno de sus extremos se carga de electricidad positiva (*polo análogo*: o cambio positivo de temperatura, carga positiva) mientras que el otro se carga de negativa (*polo antólogo*).

El método más sencillo para reconocer el signo y localización de la electricidad, consiste en espolvorear mediante un cedazo con mezcla de minio y azufre, el cristal que se calienta. El roce electriza + al minio que se adhiere en las zonas negativas del cristal, y - al azufre que señala así las positivas. El cristal se descarga por conductibilidad superficial; al enfriarse se electriza de nuevo, pero con cargas contrarias a las anteriores.



Figuras 27, 28, 29. Tres ejemplos de cristales termoelectrónicos con los signos y posiciones de las cargas que adquieren por calentamiento.

Se puede precisar el experimento colocando una lámina de turmalina entre las dos placas de un condensador conectado a un electrómetro. Cualquier alteración en la temperatura del cristal origina unas cargas eléctricas que se detectan en el aparato.

Estudiando varias secciones de turmalina se halla una polarización eléctrica más importante en laminillas talladas perpendicularmente a su eje ternario.

El cuarzo (trig. enant.) manifiesta unas cargas eléctricas que se concentran en las aristas del prisma (esto es, en los extremos de los ejes binarios).

Se ha observado un fenómeno de falsa piroelectricidad inducida por desigualdades de calentamiento, como el atribuido a la esfalerita.

La carga de polarización \vec{P} no puede observarse directamente porque la conductibilidad superficial neutraliza las cargas eléctricas, y sólo se mide su variación $\Delta\vec{P}$

$$\Delta\vec{P} = \vec{p} \cdot \Delta T$$

\vec{p} = coeficiente piroeléctrico, definido por sus componentes y por los elementos de simetría del cristal.

ΔT = incremento de temperatura (un escalar).

Las clases de simetría no piroeléctricas serán aquellas cuya dotación de simetría [M] anule el módulo de \vec{p} ; esto es, que transforma \vec{p} en $-\vec{p}$.

Por la ley de transformación,

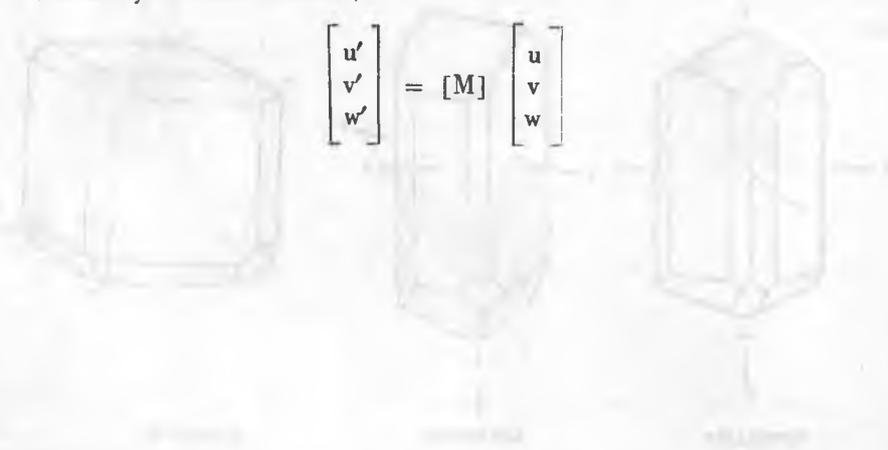


TABLA VI. CLASES CRISTALINAS PIROELÉCTRICAS

Clases	Componentes del vector \vec{p}	
Clases centradas	\vec{p} desaparece	[000]
Clases no centradas		
1	\vec{p} puede tener dirección cualquiera	[uvw]
2	\vec{p} paralelo al eje binario	[0v0]
m	\vec{p} contenido en un plano m	[u0w]
mm	\vec{p} paralelo al eje binario	[00w]
222	\vec{p} desaparece	[000]
4, 4mm	\vec{p} paralelo al eje 4	[00w]
3, 3m	\vec{p} paralelo al eje 3	[00w]
6, 6mm	\vec{p} paralelo al eje 6	[00w]
$\bar{4}, 42m, 422, 32, \bar{6}, \bar{6}m2, 622, 432, 43m, 23$	\vec{p} desaparece	[000]

Así que resulta:

- 1o. Las clases centradas no son piroeléctricas.
- 2o. De las clases no centradas sólo 10 pueden presentar piroelectricidad:

1	m
2	mm2
3	3m
4	4mm
6	6mm

Ejemplos:

Turmalina	3m
Hemimorfita	mm
Wurtzita	6mm
Sacarosa	2

Ferroelectricidad: Entre los cristales piroeléctricos los hay cuyo vector de polarización \vec{p} puede cambiar de sentido al aplicarles un campo eléctrico externo. Resulta así un desplazamiento de ciertos átomos a su posición simétrica en la red.

Por acción de la temperatura pueden alcanzar esos átomos una posición definitiva tal que el cristal deje de ser piroeléctrico. No habrá ferroelectricidad a esa temperatura, que se designa por "punto de Curie".

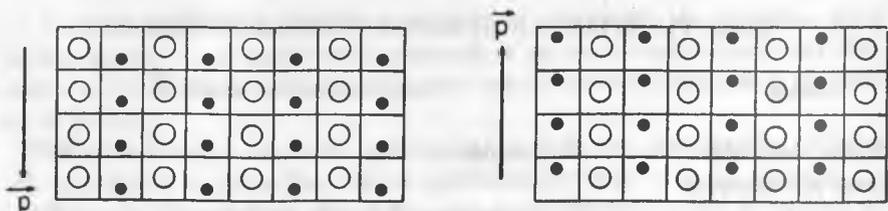


Figura 30. Red de un cristal piroeléctrico sometido a un campo eléctrico externo.

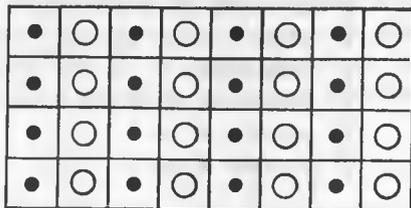


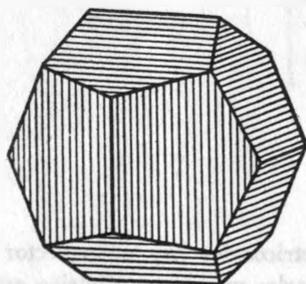
Figura 31. Red de un cristal piroeléctrico en su "punto de Curie".

Ejemplos: BaTiO₃, m3m en alta temperatura: no es piroeléctrica. En bajas temperaturas pasa sucesivamente por las clases 4mm, mm2 y 3m, todas ellas piroeléctricas. Tiene 3 puntos de Curie durante su enfriamiento.

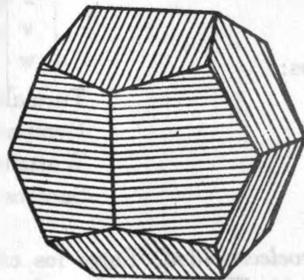
Sal de Seignette, KNa COO.CHOH.CHOH-COO . 4 H₂O. A temperatura ordinaria, 222: no es piroeléctrica.

El cristal se torna monoclínico 2 sobre + 24° y bajo - 18°: es piroeléctrico y piezoeléctrico.

KH₂PO₄, clase 42m sobre el punto de Curie y mm2 por debajo.



a



b

Figura 32. Estrias en las caras (210) de los cristales de pirita
a) termoelectricamente positivos
b) termoelectricamente negativos.

a. *PRINCIPIOS GENERALES*: Para explicar la naturaleza de la luz se han emitido varias teorías.

En la teoría de la *emisión* de la luz (Newton, 1704), la velocidad de propagación de un cuerpo a otro, animados de velocidades relativas variables, había de ser variable e igual a la suma de la velocidad de la luz y de la traslación según el principio de relatividad de Galileo; pues bien, la experiencia ha probado que esto no es cierto.

Tras ésta vino la teoría de las *ondulaciones* (Huyghens, 1690; Fresnel, 1819), según la cual los focos no emiten cuerpos luminosos, sino vibraciones o movimientos ondulatorios del éter; teoría que se confirmó con el descubrimiento de las franjas de interferencia de Fresnel. La teoría desarrollada comparaba las

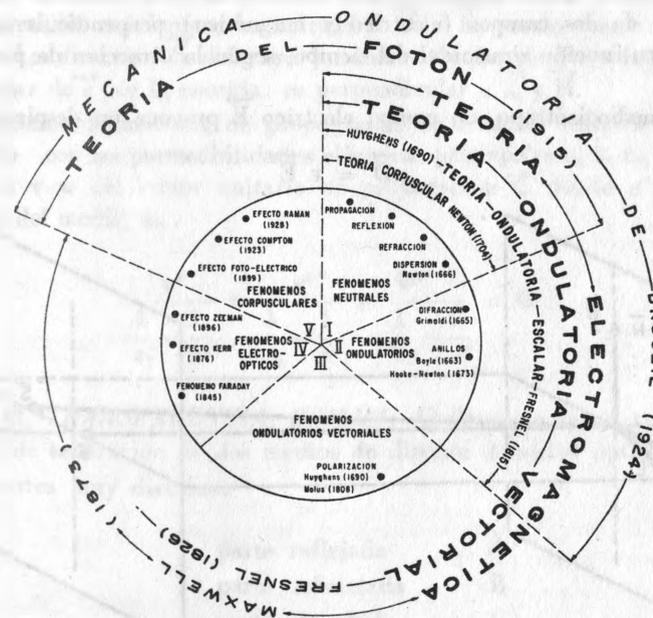


Figura 33. Esquema de las teorías de la luz.

ondas luminosas a las transversales de un fluido sumamente elástico y ligero. Pero pronto se advirtió una dificultad seria, y es que las ondas planas en los fluidos son longitudinales y sólo en los sólidos incompresibles son transversales; no cabe, por tanto, suponer que fluido tan tenue como el éter se comporte como un sólido en sus vibraciones.

A la teoría ondulatoria siguió la electromagnética (Maxwell, 1873; Hertz, 1888) que consiste en identificar el vector luminoso, ya con la intensidad de un campo eléctrico o electromagnético definido por las seis ecuaciones de Maxwell-Hertz, ya con el desplazamiento eléctrico, resultando en este último caso las mismas ecuaciones de Fresnel para las ondas elásticas transversales.

Teoría de los *quanta* (Plank, 1901), se completan mutuamente con la electromagnética, siendo las actualmente seguidas.

Los estudios de óptica cristalográfica se basan en las ondulaciones electromagnéticas según la interpretación de Fresnel. Una onda luminosa resulta de la propagación de dos campos (eléctrico y magnético) perpendiculares entre sí, que varían en función sinusoidal del tiempo, según la dirección de propagación.

a) En medio isótropo, un campo eléctrico \vec{E} provoca un desplazamiento \vec{D}

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

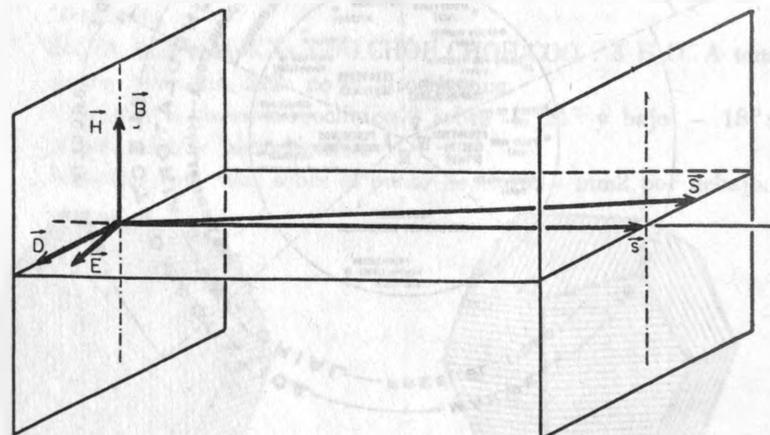


Figura 34. Propagación del rayo luminoso

- | | |
|-----------------------------|--|
| \vec{E} = campo eléctrico | \vec{D} = inducción eléctrica |
| \vec{H} = campo magnético | \vec{B} = inducción magnética |
| H y d en oposición de fase | B y H normales a \vec{E} y \vec{s} |
| B y E en fase | D normal a H y s |
| S vector de Poynting | S normal a E y H |

La energía es el producto escalar de \vec{s} por \vec{S} .

cuyas variaciones originan perpendicularmente a \vec{D} un campo magnético \vec{H} de inducción magnética \vec{B}

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Los cambios de \vec{D} se propagan armónicamente como onda sinusoidal en todas las direcciones normales al rayo luminoso s, cuya velocidad es,

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{c}{\eta} \quad \left| \begin{array}{l} c = \text{velocidad en el vacío.} \\ \eta = \text{coeficiente del medio} \\ \text{(índice de refracción).} \end{array} \right.$$

El plano perpendicular al rayo luminoso se llama frente de onda.

b) En medio anisótropo, no coinciden \vec{D} y \vec{E} , puesto que ϵ varía con la dirección. La dirección \vec{S} del rayo luminoso (vector de Poynting) es el producto escalar de \vec{s} por la energía: es perpendicular a \vec{E} y \vec{H} .

La ecuación bicuadrada de propagación de Fresnel, referida a unos ejes coordenado con las permeabilidades eléctricas principales $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3$, con las componentes u v w del vector unitario de propagación \vec{s} , siendo n el índice de refracción del medio, es,

$$\frac{u^2}{\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{n^2}} + \frac{v^2}{\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{n^2}} + \frac{w^2}{\frac{1}{\epsilon_3} - \frac{1}{n^2}} = 0$$

b. *COLOR, TRANSPARENCIA, BRILLO*: Al llegar la luz a un dióptrico, o superficie de separación de dos medios de distinta densidad óptica, se disgrega en tres partes muy diversas:

- | | |
|------------------|---|
| parte reflejada | A |
| parte refractada | B |
| parte absorbida | C |

$$L = A + B + C$$

Las cualidades de esa disgregación varían con la longitud de onda de la luz y con los distintos minerales.

a/. *Color superficial*: El color superficial es el de la luz reflejada por el cristal: es el término A de la expresión anterior. Depende:

1. De la naturaleza (color) de la luz incidente (L).
Por diferente iluminación aparece a menudo el mismo cristal con diferente coloración. Un ejemplo óptimo en este sentido es el crisoberilo Al_2O_3 , verde a la luz del día y rojo con luz artificial.
2. Del estado de la superficie del cuerpo reflejante ya que una superficie plana refleja un haz paralelo según otro también paralelo, mientras una rugosa lo dispersa. Obsérvese claramente la influencia citada al comparar el color de un mineral con el de su polvo.
Es preferible decidir del color del polvo rayando con el mineral un bizcocho de porcelana. Los cristales de piritita, p. ej., son amarillos mientras su raya es negra; los verdes o pardos de hornblenda tienen raya gris o blanca.
3. De la parte del rayo (B + C) que se hunde en el cristal: se estudia a continuación.

Nota: No es fundamental la distinción tan obvia entre color *idiocromático* y *alocromático*: el primero es el propio de la sustancia (el oro es amarillo, el cobre rojo, la malaquita verde, la azurita azul), mientras el segundo proviene de la mezcla de la sustancia incolora con otra idiocromática (la sal gema y la carnalita se presentan rojas por laminillas de óxido férrico; la blenda es amarilla o parda por la piritita; por otras sustancias la amatista es violeta, el zafiro azul, el rubí rojo).

b/. *Color por transparencia:* Depende de la relación de la parte de luz refractada B, con respecto a las otras dos A y C.

- = Cuando B es muy grande, el mineral es transparente (cristal de roca).
- = Si B es muy pequeño, el mineral es traslúcido (cuarzo lechoso) u opaco.

Así como no hay cristales enteramente transparentes (B = L) tampoco los hay completamente opacos (B = 0).

Los dos términos B y C son ambos correlativos y función del espesor del cuerpo en estudio.

$$B.C. = k$$

Los negros cristales de augita son opacos pero en placas delgadas se ven gris claro o parduzcos.

La relación anterior representa una familia de hipérbolas equiláteras. El trazado del nomograma se favorece con papel logarítmico doble.

El valor de la constante k puede ser en determinado cristal el mismo para todos los colores (long. de onda) de la luz blanca que le hiere, y entonces se presenta el cuerpo también blanco por transparencia; pero si fuese k diferente para las distintas regiones del espectro, aparecería el cuerpo con un color mezcla correspondiente a la parte de radiaciones que han logrado atravesar.

Póngase atención para separar mentalmente el color por transparencia debido a B, y el debido a C que se estudia en el epígrafe próximo: en realidad la luz que atraviesa el cuerpo es siempre el complejo (B + C).

Para un mismo valor de B, la transparencia depende de la longitud de onda λ de luz empleada. El oro es transparente para la luz verde oscura; el grafito, tan opaco para la ordinaria, es también transparente para parte del infrarrojo.

Nota: No confundir los colores citados aquí, que dependen de B, con los que se ven a continuación y son más propios de C (parte de luz absorbida).

c/. *Absorción de la luz:* Es la cantidad de luz C retenida por el cuerpo que atraviesa. Esta energía luminosa puede tardar más o menos tiempo en desprenderse y hacerlo entonces en otras formas: luz, calor, ...

La luz absorbida por los cristales es cambiada con frecuencia en otra de longitud mayor. En ciertos cuerpos el trueque es instantáneo, de modo que la emisión de nueva luz sólo tiene lugar durante la exposición del mismo a la fuente luminosa (*fluorescencia*), mientras en otros se sigue emitiendo aun apartados de ella (*fosforescencia*). Ambos fenómenos son modalidades del de *luminiscencia*: pueden cambiarse cuerpos fluorescentes en fosforescentes por enfriamiento.

La fluorescencia tiene su nombre de la fluorita, en donde primero se observó. La mayoría de las fluoritas muestran para una transparencia roja o verde, una fluorescencia azulada, particularmente intensa a la luz solar. A más de la fluorita halláanse gran número de cristales que muestran fuerte fluorescencia con intensa iluminación artificial, particularmente con luz de onda corta. A ellos pertenecen, p. ej., minerales de uranio, muchos apatitos, calcita, aragonito, ... gran número de cristales artificiales como fucsina, fluoresceína, y el interesante cianuro de Mg y Pt

El fenómeno de fosforescencia se descubrió unos 200 años antes que el fósforo, de cuya luz de oxidación recibió el nombre. Son fosforescentes a temperatura ordinaria algunos diamantes, calcitas, apatitos.

Para estudiar el debilitamiento (absorción, C) que sufre la intensidad de un rayo luminoso al atravesar un cristal, considérase a éste dividido en multitud de placas paralelas de espesor unidad. Al atravesar la primera placa su intensidad se rebajará.

$$I_1 = I_0 a \text{ siendo } a < 1$$

después de la segunda,

$$I_2 = I_1 \cdot a = I_0 \cdot a^2$$

de modo que la intensidad de la luz disminuirá en progresión geométrica con el creciente número de placas que atraviesa,

$$I = I_0 \cdot e^{-mx}; \quad e = 271 \dots$$

en donde x es el camino recorrido. Por razones teóricas se da a m el valor

$$m = \frac{4\pi}{\lambda} \kappa$$

en el que a κ se le llama índice de absorción,

$$I = I_0 \cdot e^{-\exp\left(\frac{4\pi}{\lambda} \kappa\right)}$$

El índice de absorción κ es específico para cada clase de luz, y así en la luz blanca, que es compuesta, cada color tiene su κ peculiar sufriendo diverso debilitamiento: el cristal aparecerá coloreado.

De modo análogo a como se representa el coeficiente de dilatación en los cristales, también su dependencia del índice de absorción respecto a la dirección puede ser representada por una esfera, elipsoide de revolución o elipsoide de tres ejes.

Para diversas longitudes de onda λ son los elipsoides de diferentes tamaños, y aun en las singonías monoclínica y triclínica, orientados de distinto modo.

Consecuencia de ellos es el que al incidir luz blanca, se cortan diversas secciones de elipsoides en las diferentes direcciones del cristal: aparecerá pues con distinta coloración (*pleocroísmo*).

En medios ópticamente isótropos, así cristales regulares, se absorbe la luz por igual en todas direcciones. Una bola, p. ej., de granate rojo, deja pasar siempre luz del mismo tono.

Por lo contrario, otro es el proceder en los cristales no regulares (anisótropos).

— Hay minerales que observados en una dirección son de un color, y vistos en otra, cambian. Este fenómeno se llama *dicroísmo*. El hecho se descubrió en la *dicroíta* o *Cordierita* (en honor de su descubridor Cordier, 1809). Parecido fenómeno tienen otros minerales, como la turmalina (trig. hemimórf.)

en cuyas variedades verdes se aprecia color verde musgo oscuro en dirección del eje vertical, y perpendicular a él, verde hierba claro.

— No se ven a menudo ambos colores extremos como se ha descrito, sino sólo variar la tonalidad con la dirección. Se observa más exactamente el fenómeno empleando luz polarizada pues vibra en un solo plano.

Los metales son cuerpos de gran opacidad ya que el rayo luminoso que penetra en ellos se diluye pronto en la nube de electrones libres que rodean a los átomos. Su raya en el bizcocho de porcelana suele ser negra por la misma causa: debido a su alto poder absorbente, esos electrones impiden el paso de la luz proveniente del sustrato blanco.

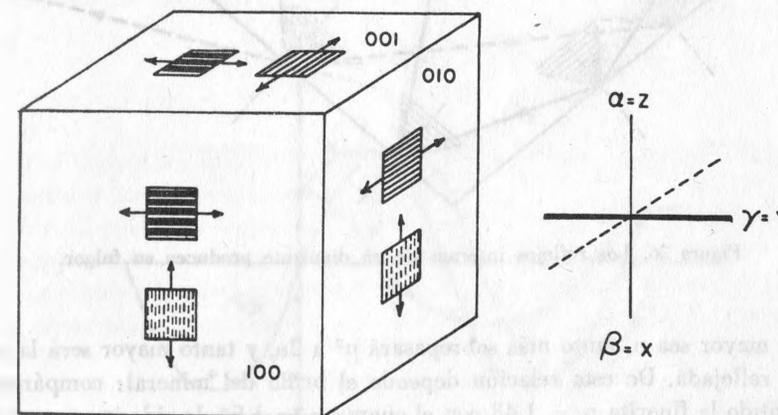


Figura 35. Esquema de pleocroísmo en la cordierita.

Brillo. El brillo es la parte de luz rechazada por el cristal, no sólo por sus caras, sino sobre todo por *reflexiones internas* (las que a su vez son función del "espacio de la reflexión total").

Para el diamante ($n = 2.4$) el ángulo límite de la reflexión total es $24^{\circ}35'$; para el vidrio ($n = 1.5$) es $41^{\circ}45'$; esto es, el espacio de la reflexión total abarca $65^{\circ}25'$ (!) en el diamante y sólo $48^{\circ}15'$ en el vidrio.

Esta es la causa del "fulgor" de las piedras preciosas.

Para simplificar este estudio, considérese que la luz incide perpendicularmente a la cara de un *crystal incoloro*; la relación de la luz reflejada a la incidente es,

$$\frac{I_r}{I_0} = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 + 2n + 1}$$

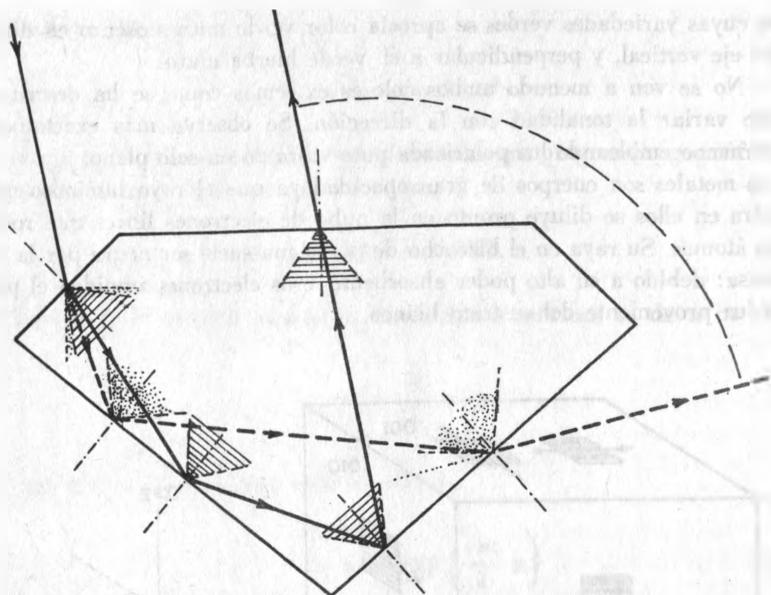


Figura 36. Los reflejos internos de un diamante producen su fulgor.

cuanto mayor sea n , tanto más sobrepasará n^2 a $2n$, y tanto mayor será la parte de luz reflejada. De esta relación depende el brillo del mineral: compárese en este sentido la fluorita $n = 1.43$ con el cuarzo $n = 1.54$, la siderita $n = 1.88$ y el diamante $n = 2.42$. Tratándose de cristales *fuertemente absorbentes*, hay que corregir la relación anterior introduciendo el índice de absorción:

$$\frac{I_r}{I} = \frac{n^2(1 + x^2) - 2n + 1}{n^2(1 + x^2) + 2n + 1}$$

como x puede alcanzar fuertes valores (5 a 7...), x^2 domina la relación entera dándole un valor próximo a 1: esta reflexión fuerte se llama metálica. De ser x muy grande para determinadas longitudes de onda, la reflexión metálica aparece coloreada. Es el caso de la fucsina cristalizada, de bonito color verde metálico, que se ve roja por transparencia, debido todo a su fuerte absorción en el verde.

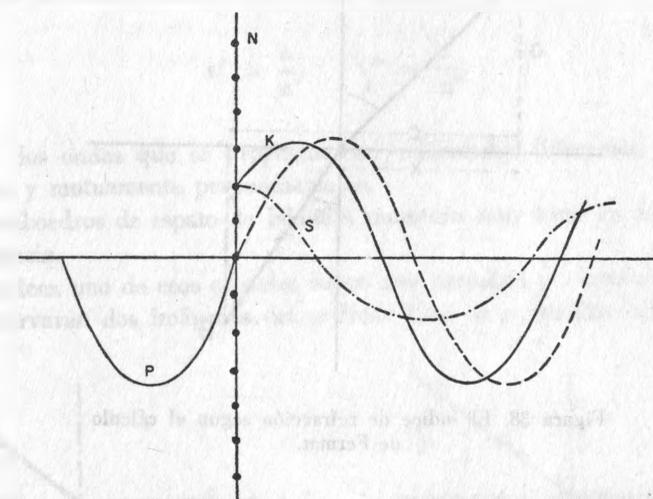
Asimismo, son debidos a fuerte absorción los brillos coloreados del Au, Cu. Brillos particulares son los crasos, perlados, sedosos, ...

c. **BIRREFRINGENCIA Y POLARIZACIÓN**: 1. *Birrefringencia*: Descubierta por E. Bartholinus (Berthelsen, 1669) en el espato de Islandia y dada su forma clásica por Huyghens, en 1690.

Es una consecuencia de la anisotropía de los cristales para la luz.

Los cuerpos amorfos y del sistema cúbico, son isótropos: el rayo luminoso que los hiere excita por igual la vibración de los sillares cristalinos en toda dirección y avanza sin más traba que la impuesta por la uniforme y mayor densidad óptica del medio.

De no estar el plano reticular N , la onda seguiría sin variación (línea punteada). Por el retículo prodúcese una onda nueva S , de la misma longitud pero desfasada y por lo general de menor amplitud. Ambas ondas interfieren produciendo la R , con retraso respecto a la P .

Figura 37. Acción del plano reticular s sobre un haz incidente.

Actúa del mismo modo el segundo, luego el tercero, etc. . . , planos reticulares: la onda se retrasa.

Un problema de máximos y mínimos debido a Fermat, deduce el índice de refracción de la disminución de velocidad correspondiente.

Fermat partió de la hipótesis de que al pasar un rayo luminoso de un medio a otro más denso, se propaga con más dificultad, por tanto, el camino recto no siempre es el más rápido. El tiempo necesario para recorrer AO , será,

$$t = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{v}$$

para recorrer OB,

$$t' = \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v'}$$

el tiempo total,

$$T = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v'}$$

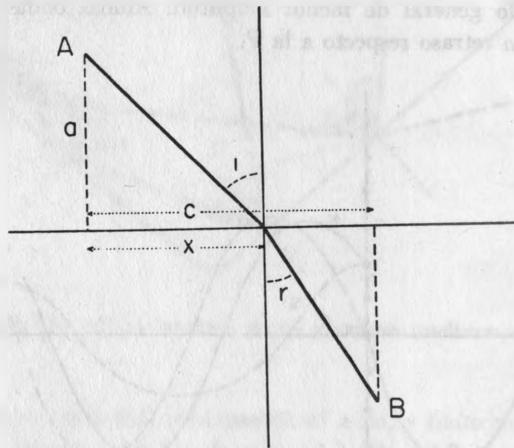


Figura 38. El índice de refracción según el cálculo de Fermat.

El mínimo de esta función,

$$\frac{dT}{dx} = \frac{x}{v \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{v' \sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = 0 \text{ como: } x = AO \text{ sen } i$$

$$\frac{AO \cdot \text{sen } i}{v \cdot AO} = \frac{OB \cdot \text{sen } r}{v' \cdot OB}$$

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{v}{v'} = n, \text{ índice de refracción}$$

$$c-x = OB \text{ sen } r$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = AO$$

$$\sqrt{b^2 + (c-x)^2} = OB$$

La refracción es una magnitud de resistencia de la velocidad de la luz en un medio óptico. Los índices de la mayoría de los minerales están entre 1.4 y 2.0.

Tratándose de cristales anisótropos, el problema se complica un tanto, pues la excitación no provoca iguales vibraciones de los sillares cristalinos en todas direcciones, sino máximas diferencias en direcciones mutuamente perpendiculares: las partículas que vibran más aprisa condicionan un rayo de menor índice de refracción que el de las que se mueven con más lentitud.

Los cuerpos isótropos se llaman monorrefringentes por su índice único de refracción.

Los anisótropos son birrefringentes, por dividir el rayo incidente en dos, ordinario y extraordinario.

Esta es una consecuencia de la ecuación bicuadrada de Fresnel (Cf., p. 61) que tiene dos soluciones para el índice de refracción:

$$v' = \frac{c}{n'} \quad v'' = \frac{c}{n''}$$

resultarán dos ondas que se propagan con velocidades diferentes, linealmente polarizadas y mutuamente perpendiculares.

Los romboedros de espato de Islandia muestran muy bien los fenómenos de birrefringencia.

Si se coloca uno de esos cristales sobre una cartulina perforada por un alfiler, se observarán dos imágenes del orificio. Una, la *o* (ordinaria) permanece

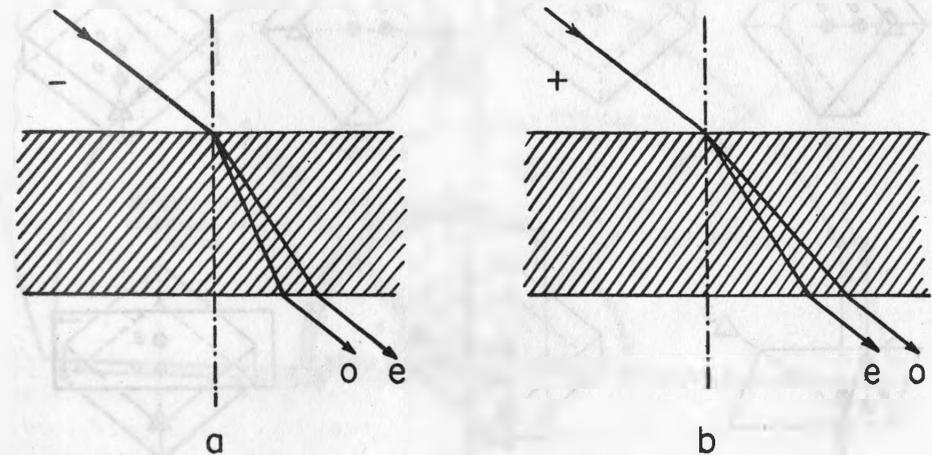


Figura 39. Refracción de la luz en dos medios anisótropos a) medio negativo; b) medio positivo.

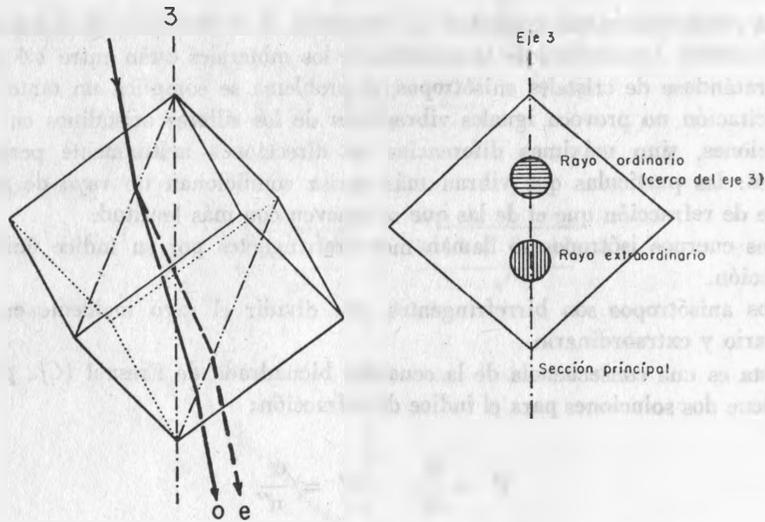


Figura 40. Separación de los rayos ordinario y extraordinario en el Espato de Islandia.

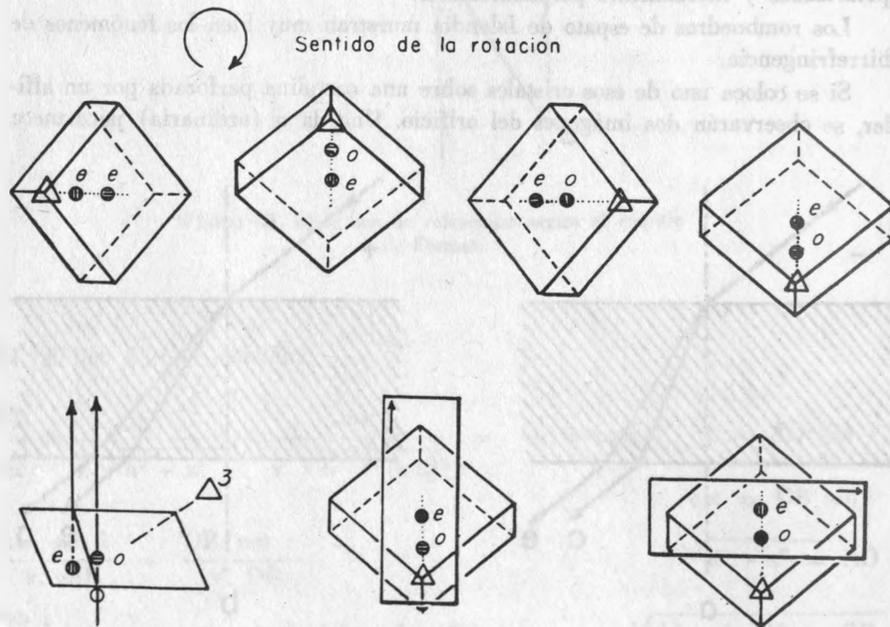


Figura 41. Experimentos fundamentales de Bartolín. El triángulo indica la posición del eje 3 en la calcita; las líneas de puntos señalan la sección principal.

fija durante la rotación del romboedro alrededor del rayo incidente, mientras la otra, *e* (extraordinaria) sigue el movimiento.

El haz incidente se divide así en dos rayos refractados. Llámanse rayo ordinario *o* porque sigue las leyes ordinarias de la refracción:

- . La relación de senos es constante.
- . El rayo refractado está en el mismo plano que el incidente. En el espato es el rayo más cercano al eje ternario.

El rayo extraordinario *e* no las sigue:

- . La relación de senos no es constante, pues la velocidad varía.
- . El rayo refractado no está siempre en el plano del incidente, sino *siempre* en la sección principal. (Llámanse así al plano que contiene al rayo y al eje óptico). En el espato es el rayo más alejado del eje ternario.

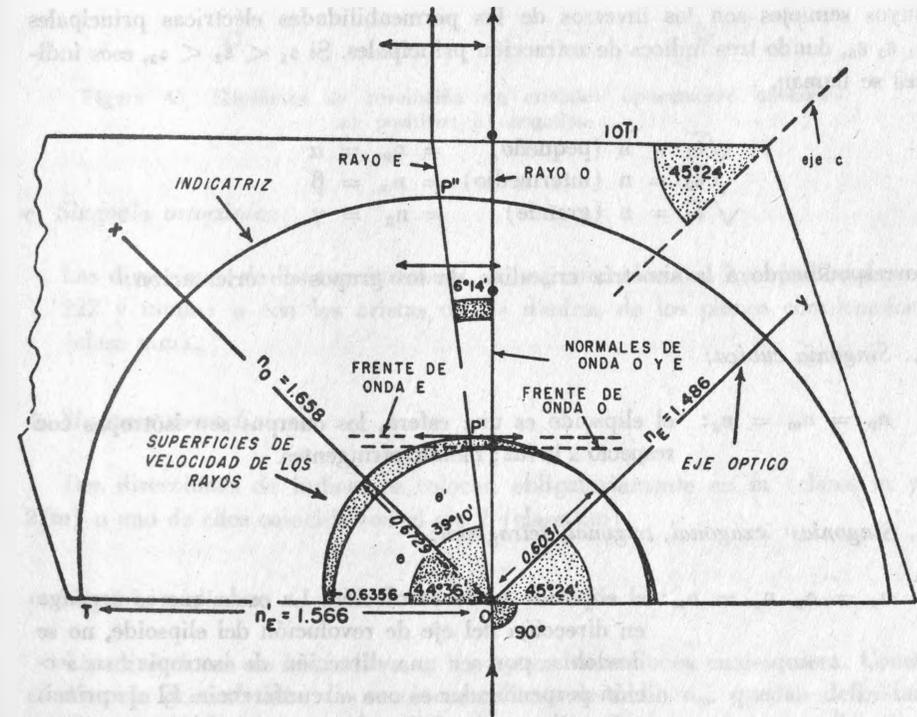


Figura 42. Paso de la luz por la sección principal de un cristal de calcita.

La doble refracción no se observa en todas las direcciones del romboedro.

En efecto, si se tallan dos caras perpendiculares al eje principal, sólo se observará una imagen a través del espato cuando el ojo esté en la normal a las dos caras talladas; pero la imagen se dobla al apartar la vista de la perpendicular.

La calcita tiene así una dirección (un *eje*), según la cual la refracción es sencilla, y esta dirección es paralela al eje cristalográfico vertical. En toda otra dirección la refracción es doble.

El elipsoide de índices en el cristal

El elipsoide de Fresnel es la cuádrica (Cf., p. 61),

$$\frac{x_1^2}{\epsilon_1} + \frac{x_2^2}{\epsilon_2} + \frac{x_3^2}{\epsilon_3} = 1$$

cuyos semiejes son los inversos de las permeabilidades eléctricas principales ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 , dando tres índices de refracción principales. Si $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3$, esos índices se llaman,

$$\begin{aligned} \sqrt{\epsilon_1} &= n \text{ (pequeño)} &= n_p &= \alpha \\ \sqrt{\epsilon_2} &= n \text{ (intermedio)} &= n_m &= \beta \\ \sqrt{\epsilon_3} &= n \text{ (grande)} &= n_g &= \gamma \end{aligned}$$

correspondiendo a la simetría cristalina de los grupos de orientación:

a. Singonía cúbica:

$n_p = n_m = n_g$: el elipsoide es una esfera, los cuerpos son isótropos con respecto a la luz; monorrefringentes.

b. Singonías exagonal, trigonal, tetragonal:

$n_p = n_g$, $n_p \neq n_m$: el elipsoide es de revolución. La onda que se propaga en dirección del eje de revolución del elipsoide, no se desdobla, por ser una dirección de isotropía: su sección perpendicular es una circunferencia. El eje principal se llama *eje óptico* de isotropía. Entre estos cristales se distinguen convencionalmente dos grupos:

- Cristales uniáxicos negativos: si n_p se dirige según el eje principal.
- Cristales uniáxicos positivos: si n_g se dirige según el eje principal.

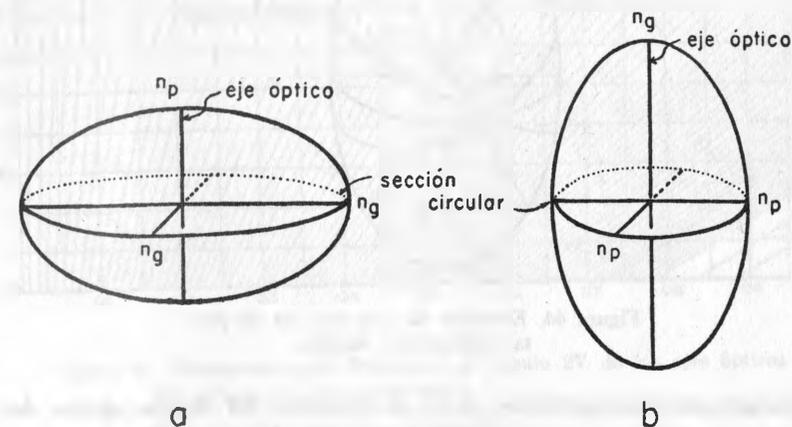


Figura 43. Elipsoides de revolución de cristales ópticamente uniáxicos: a) positivo; b) negativo.

c. Singonía ortoclínica:

Las direcciones de los tres índices n_p , n_m , n_g coinciden con los ejes 2 (clases 222 y mmm) o con las aristas de los diedros de los planos coordenados (clase mm).

d. Singonía monoclinica:

Dos direcciones de índices se colocan obligatoriamente en m (clases m y $2/m$) o uno de ellos coincide con el eje 2 (clase $2m$).

e. Singonía triclinica:

Las direcciones de los índices n_p , n_m , n_g son direcciones cualesquiera. Como el elipsoide general tiene dos secciones cíclicas de radio n_m , quedan definidas dos direcciones de isotropía normales a ellas, que se llaman *ejes ópticos*. Por ello, estos cristales se dicen *biáxicos*, y convencionalmente,

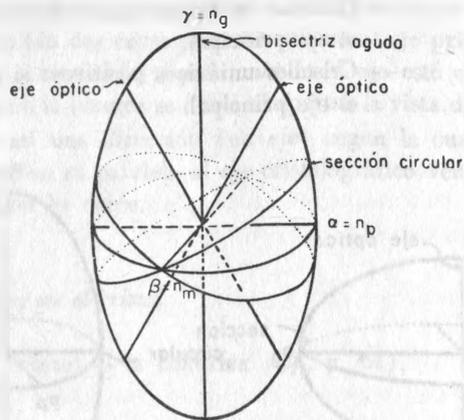


Figura 44. Elipsoide de tres ejes, de un cristal ópticamente biáxico.

- . cristales biáxicos positivos si n_g es bisectriz del diedro obtuso de las secciones cíclicas, o abreviadamente bisectriz obtusa.
- . cristales biáxicos negativos si n_g es su bisectriz aguda, todo ello, por analogía con los cristales uniáxicos.

Las cuádricas análogas a las de Fresnel que ilustran sobre las velocidades de propagación, reciben el nombre de "Indicatriz de Fletcher".

Ángulo de los ejes ópticos

El ángulo $2V$ formado por los ejes ópticos, medido sobre n_g es,

$$\operatorname{tg} V = \frac{n_g}{n_p} \sqrt{\frac{n_m^2 - n_p^2}{n_g^2 - n_m^2}}$$

Para tener continuidad de valores V pueden tenerse a los cristales uniáxicos como casos extremos de biáxicos.

Los signos que acompañan a los elipsoides, indican su carácter óptico, que puede deducirse de la expresión,

$$\frac{2}{n_m^2} - \frac{1}{n_g^2} - \frac{1}{n_p^2}$$

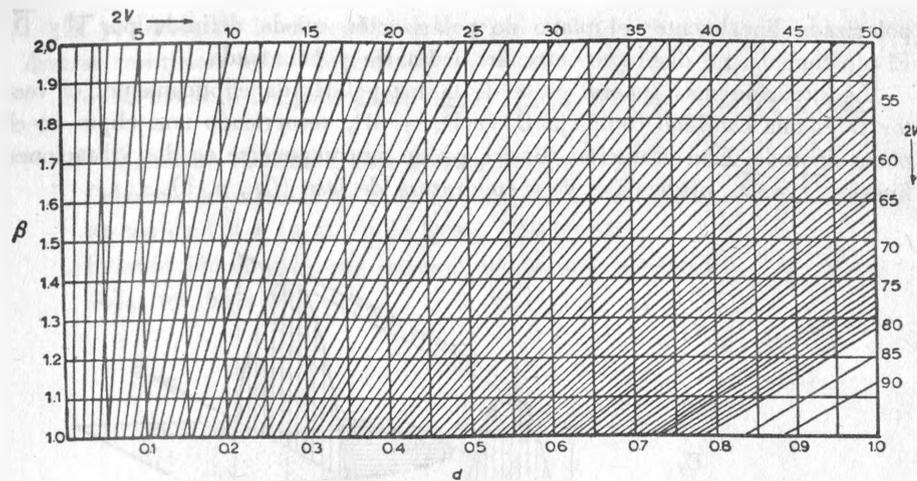


Figura 45. Monograma para determinar el ángulo $2V$ de los ejes ópticos

$$d = \frac{2D \text{ (distancia entre melatopos)}}{2R \text{ (diámetro de la fig. de interf.)}} \quad \beta = \text{índice intermedio}$$

2. Polarización: Distingúense varias clases de rayo luminoso según el comportamiento del vector de desplazamiento eléctrico \vec{D} (Cf., fig. 34). Cuando de una manera desordenada toma todas las orientaciones en el plano de onda, la luz se llama natural. Si la dirección de \vec{D} fuese constante, la luz se llamaría

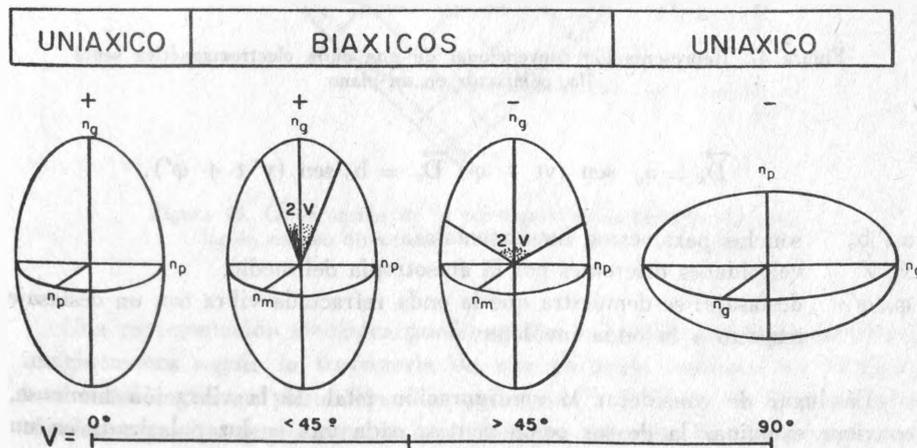


Figura 46. Carácter óptico.

polarizada linealmente: el plano de polarización queda definido por \vec{s} y \vec{D} . El ojo humano no distingue entre luz ordinaria y polarizada.

La situación más general es la de la luz polarizada elípticamente: el vector \vec{D} es una cantidad compleja $\vec{D} = \vec{D}_x + i\vec{D}_y$ recorriendo una elipse en el plano de onda. Esta vibración elíptica puede descomponerse en dos vibraciones lineales \vec{D}_x y \vec{D}_y , ortogonales y en cuadratura de fase (Cf., p. ?).

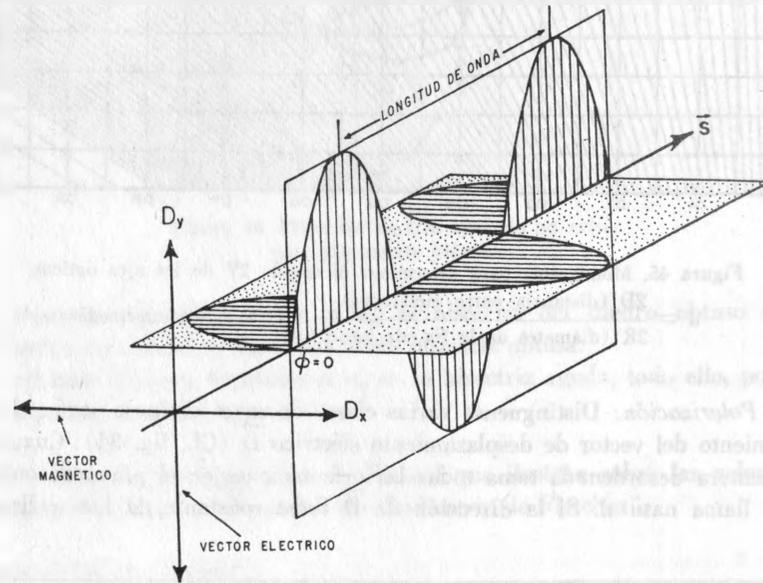


Figura 47. Representación convencional de una onda electromagnética sencilla, polarizada en un plano.

$$\vec{D}_x = a_0 \sin(vt + \varphi) \quad \vec{D}_y = b_0 \sin(v't + \varphi')$$

- a_0, b_0 son los parámetros fundamentales.
 v, v' velocidades diferentes por la anisotropía del medio.
 φ, φ' desfase: se demuestra que la onda refractada vibra con un desfase respecto a la onda incidente.

En lugar de considerar la configuración total de la vibración luminosa, conviene examinar la de sus componentes: cada una es luz polarizada en un plano.

El problema de la obtención de luz polarizada tiene así su solución en la diversa resistencia a la vibración de los sillares cristalinos.

De ese modo la luz polarizada lo será lineal, circular o elípticamente:

- . Polarización rectilínea, con retrasos de 1 o de $1/2 \lambda$.
- . Polarización circular se tendrá cuando el retraso mutuo de las componentes sea de $1/4 \lambda$ (a iz.) o de $3/4 \lambda$ (a derecha).
- . Polarización elíptica, con retrasos que no sean los citados ($1/8, 1/7, \dots \lambda$). (Cf., figs. 55 a 57).

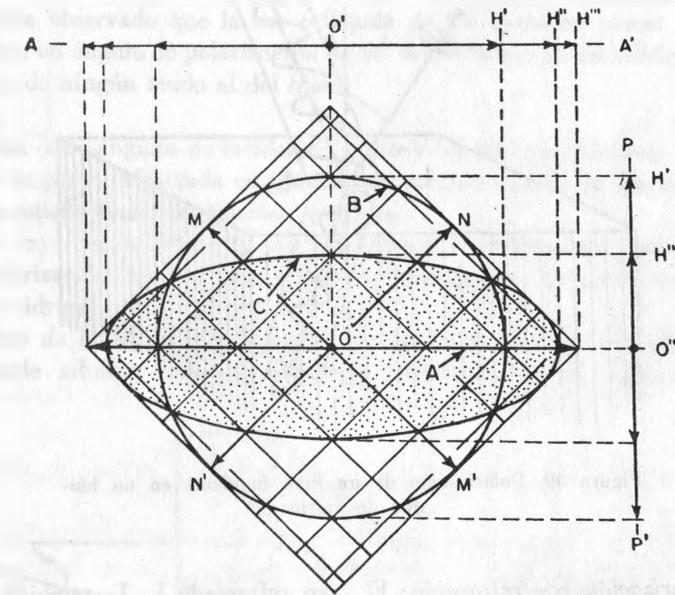


Figura 48. Construcción de la resultante de amplitudes de oscilación en dos direcciones mutuamente perpendiculares.

Una representación mecánica puede ayudar a resumir las ideas anteriores: imaginémosnos seguir la trayectoria de una partícula luminosa en vibración transversal según un plano fijo, "luz polarizada". Si ahora lo hacemos girar rápidamente arrastrando consigo la ondulación anterior, la nueva trayectoria será la imagen de un rayo de luz ordinaria:

A. Hay varios procedimientos para obtener luz que vibre en un solo plano, esto es, para reducir o anular uno de sus componentes de vibración:

- a) *Polarización por reflexión*: Cuando un rayo luminoso incide en una placa brillante de vidrio, agua, . . . (excepto metales) se polariza al reflejarse y la luz vibra en un plano perpendicular al de incidencia. El rayo reflejado $L_1 L_2$ está enteramente polarizado.

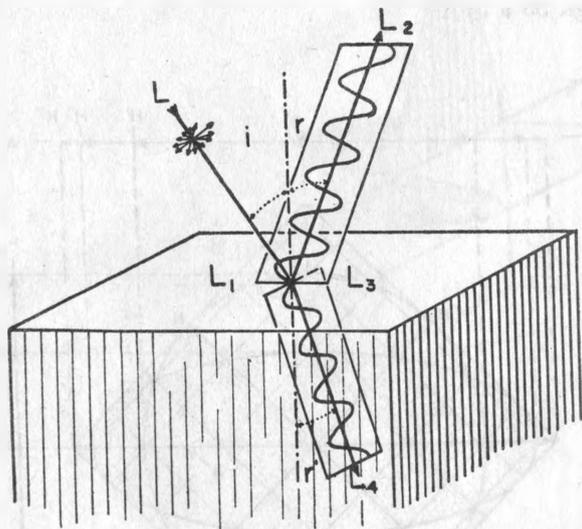


Figura 49. Polarización de un rayo incidente en un bloque de vidrio.

- b) *Polarización por refracción*: El rayo refractado $L_3 L_4$ también está polarizado pero vibra paralelamente al plano de incidencia de la luz. Como se ve, ambos rayos tienen sus vibraciones en planos perpendiculares entre sí.

El rayo reflejado $L_1 L_2$ está completamente polarizado cuando el rayo refractado correspondiente $L_3 L_4$ le es perpendicular; es decir, cuando $i + r = 90^\circ$.

En este caso,

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin i}{\sin (90-i)} = \frac{\sin i}{\cos i} = \operatorname{tg} i$$

Este ángulo de "polarización" queda así determinado por el índice:

	n	i
Hielo	1.31	52°40'
Fluorita	1.44	55°7'
Vidrio	1.50	56°20'
Obsidiana	1.51	56°30'
Piropo	1.75	61°4'
Blenda	2.37	67°8'

Nota: En las previsiones anteriores a los viajes interplanetarios, ya se había observado que la luz reflejada de los llamados mares de la luna tiene un ángulo de polarización de 56°43', análogo al del vidrio u obsidiana; de ningún modo al del hielo.

Para otros ángulos de incidencia se tiene luz sólo parcialmente polarizada. Si la parte refractada es prácticamente nula (como en los metales) no se obtiene una polarización rectilínea.

El rayo refractado $L_3 L_4$ no está nunca completamente polarizado. La polarización mejora por refracciones sucesivas (atravesando una fila de vidrios).

- c) *Paso de la luz por un cristal birrefringente*. Por lo aclarado antes, se puede admitir que los dos rayos resultantes de la doble refracción,

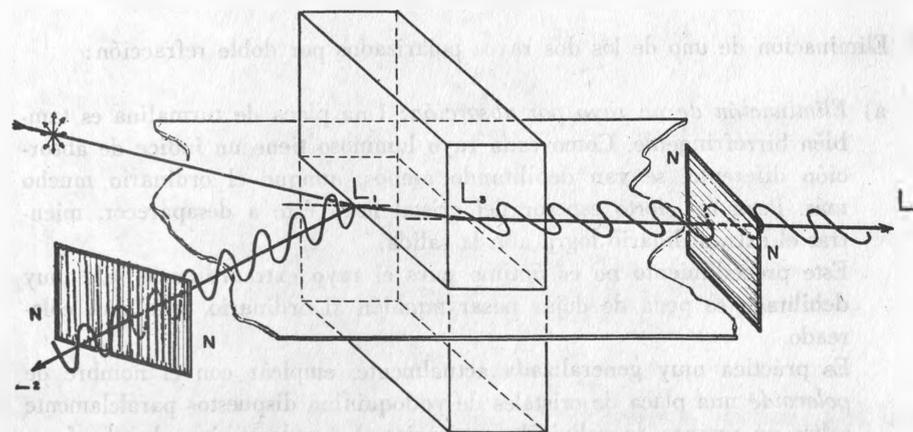


Figura 50. Análisis de los rayos polarizados según la figura 49. El esquema ofrece un medio de investigar las direcciones de polarización de un polarizante (NN).

están enteramente polarizados, con planos de vibración mutuamente perpendiculares.

En el ejemplo clásico del espato de Islandia ya estudiado, la luz vibra en el *rayo ordinario* perpendicularmente a la sección principal (llámase así al plano que contiene al rayo más cercano al eje ternario). (Cf., figs. 40 y 52.)

La vibración de la luz en el *rayo extraordinario* es siempre paralela a la sección principal. En el espato es el rayo más alejado del eje ternario.

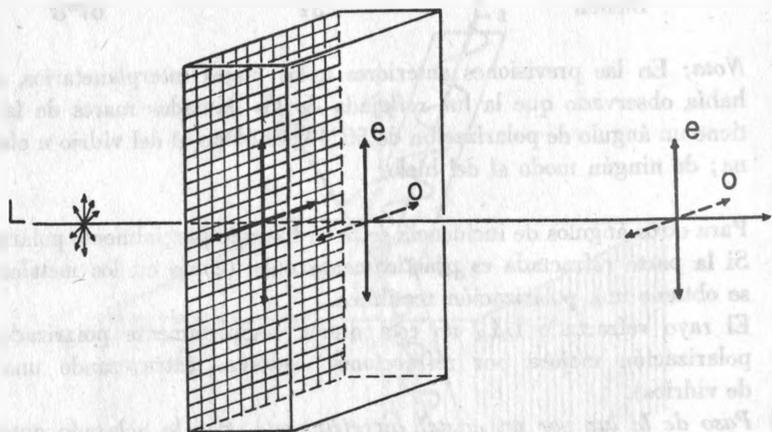


Figura 51. Obtención de luz polarizada (e) por absorción del rayo ordinario (o).

B. Eliminación de uno de los dos rayos polarizados por doble refracción:

- a) *Eliminación de un rayo por absorción:* Una placa de turmalina es también birrefringente. Como cada rayo luminoso tiene un índice de absorción diferente, se van debilitando ambos, aunque el ordinario mucho más. Para un cierto espesor del cristal llega éste a desaparecer, mientras el extraordinario logra aún la salida.

Este procedimiento no es óptimo pues el rayo extraordinario sale muy debilitado so pena de dejar pasar también al ordinario, y a más, coloreado.

Es práctica muy generalizada actualmente, emplear con el nombre de *polaroide* una placa de cristales de yodoquinina dispuestos paralelamente sobre un soporte de polivinilo (epitaxis). La yodoquinina absorbe fuertemente en el plano normal a su eje óptico, mientras que la luz según ese eje óptico, sale polarizada en una sola dirección.

- b) *Eliminación de uno de los rayos polarizados, por reflexión total:* Para conseguirlo, se tallan en las bases de un romboedro de espato de Islandia, dos caras que formen un ángulo de 68° con aristas MQ y NP. Luego se divide el cristal por un plano perpendicular a la sección principal uniéndose en seguida ambas mitades con Bálsamo de Canadá. El aparato así construido se llama prisma de Nicol, o simplemente nicol.

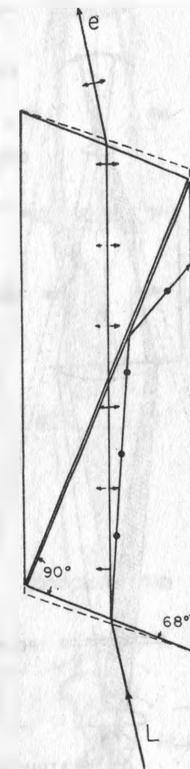


Figura 52. Modo de obtener el rayo extraordinario (e) mediante un prisma de Nicol.

Un rayo que incida en una de las caras menores, experimentará la doble refracción. El rayo ordinario sufre la reflexión total al llegar al bálsamo y es desviado fuera, mientras sólo el extraordinario llega a atravesar el prisma.

Este fenómeno se verifica gracias a que el índice de refracción del bálsamo es de 1.549 (luz del Na), intermedio entre los del rayo ordinario 1.658 y del extraordinario 1.486 (para la misma luz).
A la salida del nicol, sólo habrá luz polarizada en un plano.

El microscopio polarizante. Trátase de un microscopio ordinario provisto de piezas suplementarias como la platina giratoria, el diafragma condensador y los polarizantes (polarizador y analizador).

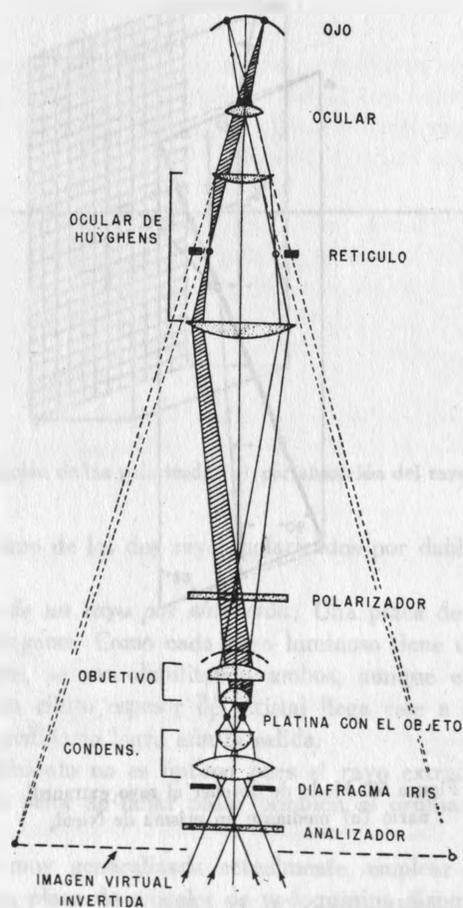


Figura 53. Recorrido de la luz por un ortoscopio dotado de filtros polarizantes.

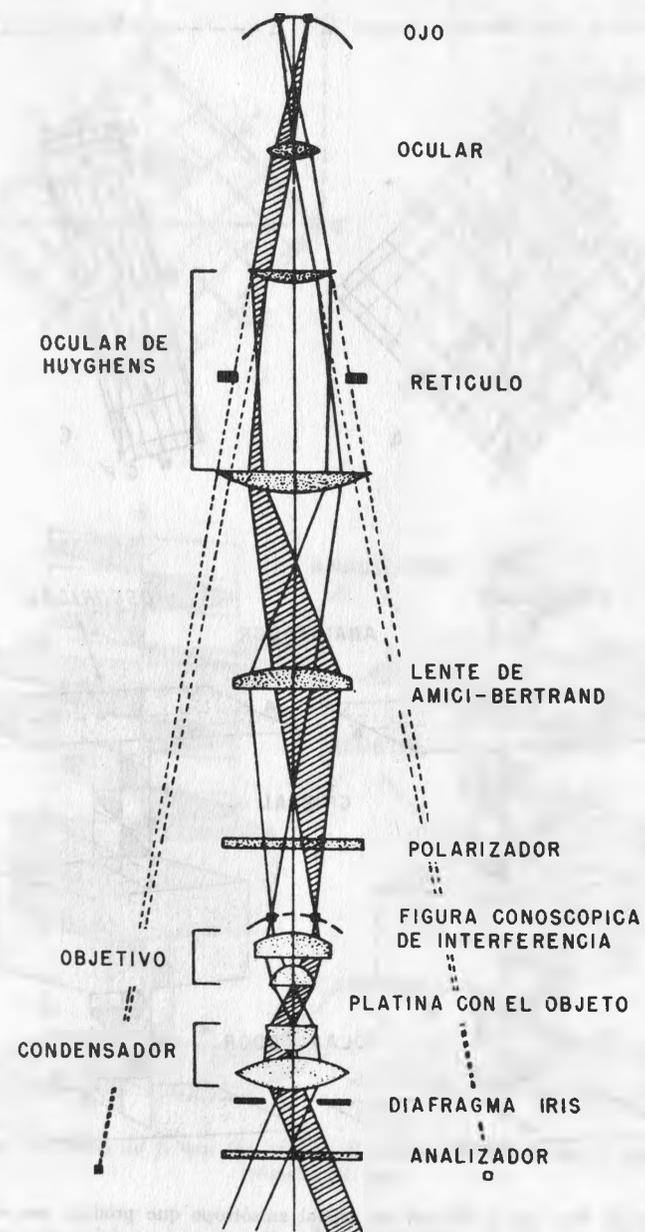


Figura 54. Trayecto de la luz por un conoscopio con polarizadores.

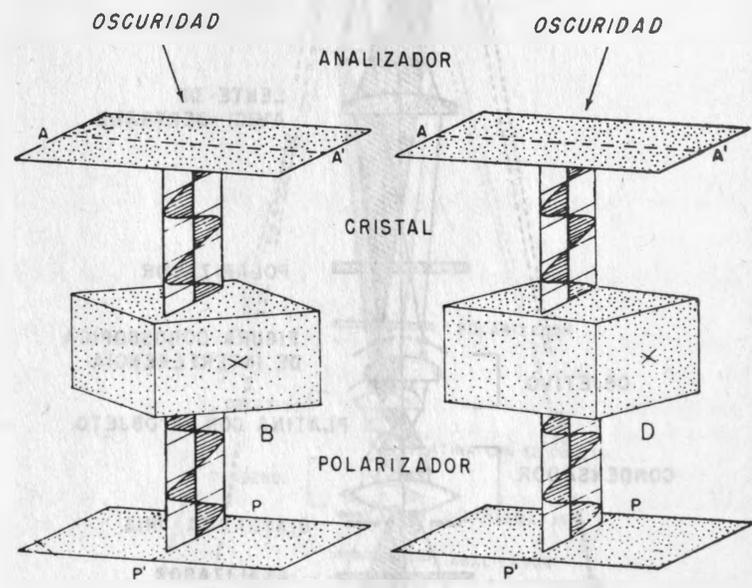
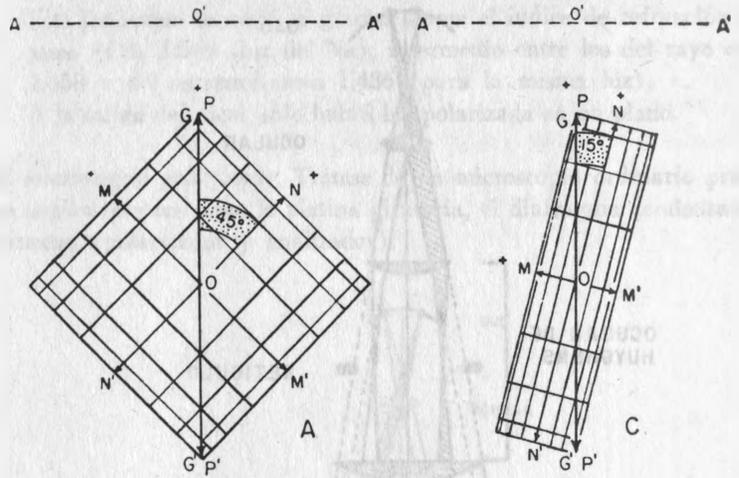


Figura 55. Paso de la luz por un cristal anisótropo que produce una diferencia de fase $n\lambda$. En la parte superior los diagramas vectoriales para giro del cristal a 45° , a 15° . En la parte inferior la perspectiva del cristal para giros de 45° de 15° .

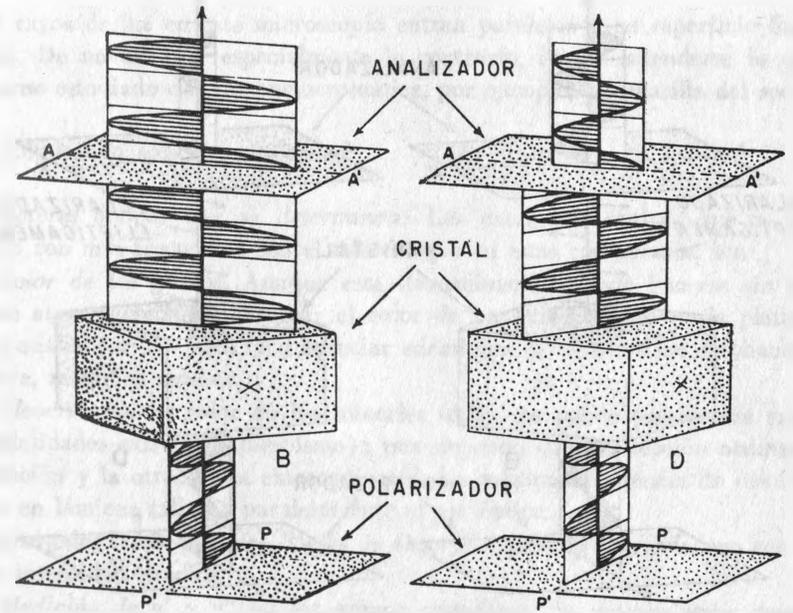
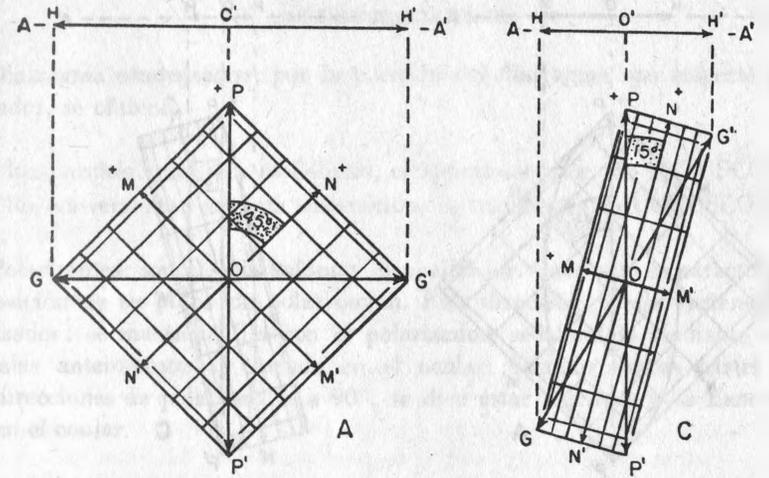


Figura 56. Paso de la luz por un cristal anisótropo que produce una diferencia de fase

$$\frac{n}{2} \lambda$$

En la parte superior los diagramas vectoriales para giro del cristal a 45° , a 15° . En la parte inferior la perspectiva del cristal para giros de 45° , de 15° .

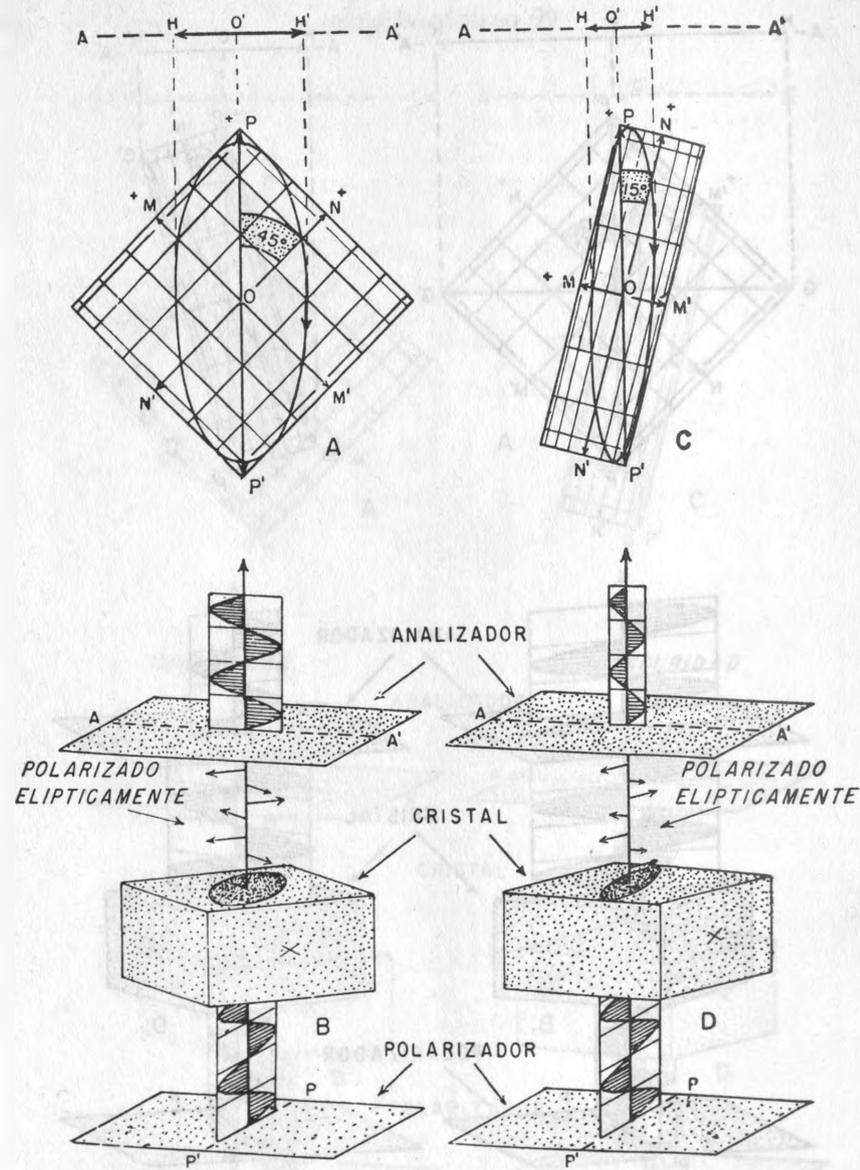


Figura 57. Paso de la luz por un cristal anisótropo que produce una diferencia de fase

$$\frac{n}{8} \lambda$$

En la parte superior los diagramas vectoriales para giro del cristal a 45°, a 15°.
En la parte inferior la perspectiva del cristal para giros de 45°, de 15°.

Diafragma condensador: por la posición del diafragma con respecto al condensador, se obtiene:

- . luz paralela: con esta modalidad, el aparato se dice ser ORTOSCOPIO.
- . luz convergente: con esta disposición, se transforma en CONOSCOPIO.

Polarizantes: son el polarizador y el analizador. Cada uno se caracteriza por la posición de su plano de polarización. Esta dirección puede variarse con el analizador; se mantiene fija con el polarizador, señalándola mediante un hilo reticular antero-posterior trazado en el ocular. Cuando ambas partes tienen sus direcciones de polarización a 90°, se dice estar cruzados y se tiene oscuridad en el ocular.

A. Observaciones en ORTOSCOPIO:

Los rayos de luz en este microscopio entran paralelos y su superficie focal es plana. De no advertir especialmente lo contrario, ha de entenderse lo que sigue como estudiado con luz monocromática, por ejemplo, la amarilla del sodio.

a) Empleando sólo el polarizador:

Caracteres ópticos que se determinan: Los caracteres ópticos que se determinan con más frecuencia con el microscopio en estas condiciones, son:

1. Color de los granos. Aunque esta determinación puede hacerse sin polarizante alguno, conviene observar el color de un grano puesto en la platina, sobre el analizador. Así será fácil apreciar además en él su forma, su exfoliación, su relieve, medir su espesor,...

2. Pleocroísmo. El color en los minerales uniáxicos puede presentarse entre dos modalidades extremas (dicroísmo): una depende de la dirección ordinaria de vibración y la otra, de la extraordinaria. La máxima diferencia de color se observa en láminas talladas paralelamente al eje óptico.

Los cristales biáxicos tienen 3 ejes de absorción principales, cada uno con su color e intensidad propios.

3. Medición de n' y n'' en los granos cristalinos. Se colocan unos granos cristalinos en un portaobjetos con una gota de líquido de índice de refracción N conocido. Se observan con sólo el polarizador. Pueden aplicarse dos procedimientos:

3a. Franja de Becke: Al elevar el objetivo aparece una línea brillante que bordea los granos, desplazándose hacia el medio de mayor índice de refracción, y viceversa. En el caso de ser n = N no se verá esa franja.

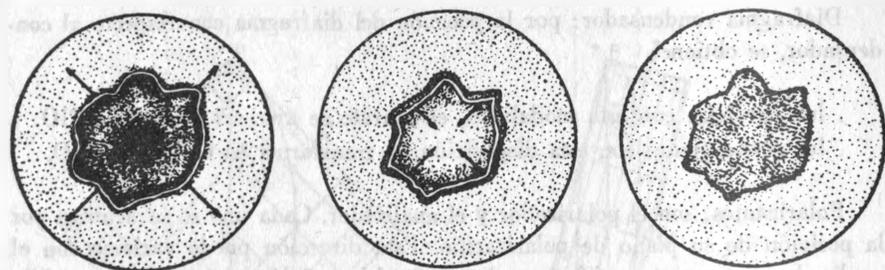


Figura 58. Iluminación central y franja de Becke

- Microscopio enfocado en un grano mineral
- Cuando se eleva el tubo, el índice del grano superior al del medio de inclusión
- Cuando se eleva el tubo, el índice del grano es inferior al del medio circundante.

3b. *Franja de Schroeder van der Kolk*: Se emplea la iluminación oblicua que se obtiene abriendo completamente el diafragma del condensador e insertando el marco del analizador hasta su medio camino (emplear objetivos bajos): esto hace que se ilumine la parte opuesta del grano y oscurezca la contigua a la sombra introducida cuando éste tenga mayor índice n que el del medio líquido N .

Como la focalización del grano puede invertir su iluminación, hay que verificar su posición con otro granito de índice conocido.

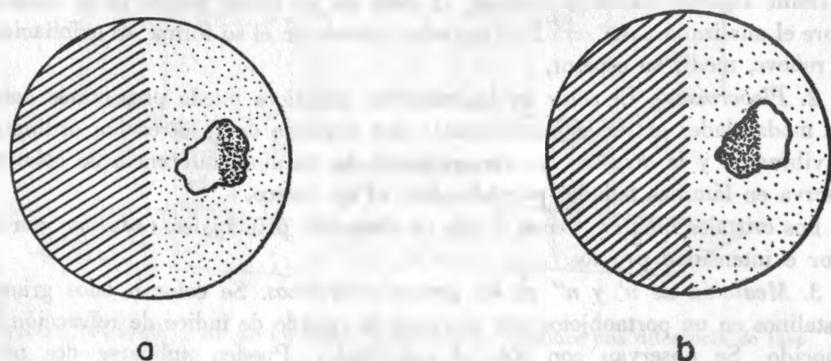


Figura 59. Franja de Schroeder van der Kolk

- El índice del cristal es menor que el del líquido.
- El índice del cristal es mayor que el del líquido.

Orientación requerida para determinar los índices principales

El índice ordinario de un *cristal uniaxial* se puede determinar con cualquier grano; mas el extraordinario sólo por un cristal visto perpendicularmente a su eje óptico. La búsqueda de esa orientación requerida, a menos que el cristal tenga hábito prismático, se hace sobre granos por sus figuras de interferencia (Cf., p.96) o en los que presentan sus colores más altos de interferencia, en relación con su grosor.

En los *cristales biaxiales*, una sección paralela al plano óptico, esto es, normal a n_m , puede emplearse para determinar n_p y n_g . En la sección tallada normal a las bisectrices o a los ejes ópticos, se determinará n_m . Ninguna sección puede tener ambos índices sobre o los dos, bajo n_m con lo que se tiene un medio de determinar n_m . Así, un grano que tuviera 1.536 como índice mayor, y otro lo tuviera como índice menor: el valor de $n_m = 1.536$.

b) Empleando los dos polarizantes cruzados

1. *Determinación de las direcciones de extinción*. Cuando se somete un trozo cristalino de caras paralelas a un haz monocromático en el ortoscopio, hay dos de sus direcciones D' y D'' privilegiadas y perpendiculares entre sí que corresponden a los ejes principales de la elipse sección de la lámina con la indicatriz de Fresnel. El ángulo que forma una de esas direcciones con alguna de las líneas morfológicas del cristal (arista, línea de exfoliación o crucero, plano de macla, estría, etc.) puede ser característico del sistema cristalino y aun de la especie mineralógica que se estudia.

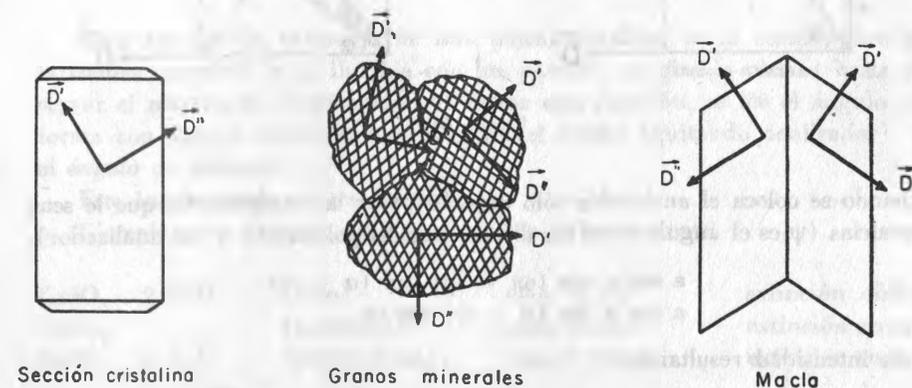


Figura 60. Direcciones de extinción de cristales en el microscopio polarizante.

Colocando la lámina entre el polarizador y el objetivo, si P es la dirección de vibración del polarizador, su amplitud a la salida de la lámina es $a \cos \omega t$. Saliendo de la lámina, entre ambas ondas polarizadas perpendicularmente,

$$D'' = a \cos \alpha \cos \alpha''t$$

$$D' = a \sin \omega \cos (\omega t - \varphi)$$

con φ como la diferencia de fase entre ambas ondas:

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} e (n' - n'')$$

en donde, e = espesor de la lámina,

n', n'' = índices de refracción de D' y D''

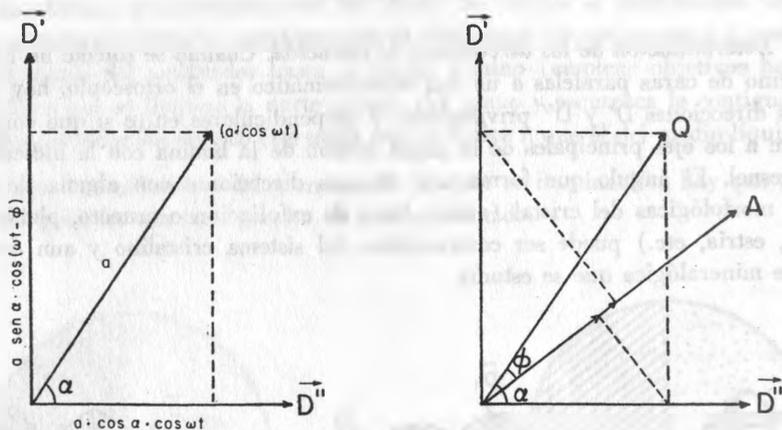


Figura 61.

Cuando se coloca el analizador sólo dejarán pasar las componentes que le sean paralelas (ψ es el ángulo entre las direcciones del polarizador y del analizador),

$$a \sin \alpha \cos (\omega t - \varphi) \sin (\alpha - \psi)$$

$$a \cos \alpha \cos (\alpha - \varphi) \cos \omega t$$

y la intensidad resultante

$$I = I_0 [\cos^2 \psi - \sin^2 \alpha \cos (2\alpha - \psi) \sin^2 \frac{\varphi}{2}]$$

Un caso práctico importante es el de nícoles cruzados ($\varphi = \frac{\pi}{2}$)

$$I = I_0 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

Se observa un máximo de luz para $\alpha = (2k + 1) \frac{\pi}{4}$ cuando D' y D'' estén a 45° de los polarizantes, y un mínimo para $\alpha = k \frac{\pi}{2}$ cuando una de las direcciones D coincida con las direcciones de vibración de los polarizantes: habrá *extinción*.

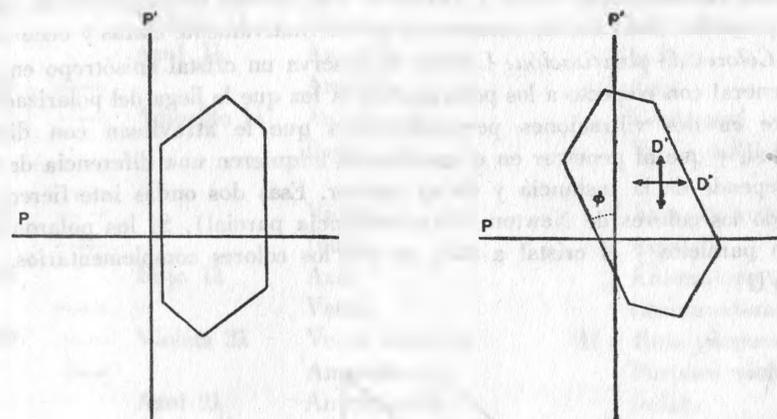


Figura 62. Medida del ángulo de extinción φ .

Para apreciar la extinción de una placa cristalina, se la coloca entre polarizantes cruzados, se la ilumina con luz paralela, se gira la platina hasta observar el mínimo de iluminación. Al lograr esta posición, se lee el ángulo que forma con alguna dirección morfológica del cristal (quitando analizador): es el *ángulo de extinción*.

Este ángulo puede ser *recto* u *oblicuo*.

Ejemplos: 1o. Los tres sulfatos de precipitación reciente,

CaSO ₄ · 2 H ₂ O	(yeso):	clase 2/m;	extinción oblicua
CaSO ₄	(anhidrita):	clase mmm;	extinción recta
CaSO ₄ · ½ H ₂ O	(hemihidrato):	clase 6/mmm;	extinción recta

cristalizan en agujas finas alargadas por el eje c.

2o. Los piroxenos, los anfíboles y las plagioclasas, pueden determinarse mediante su ángulo de extinción característica.

2. *Distinción entre cuerpos mono. y birrefringentes.* Al colocar un cuerpo monorrefringente en el microscopio con los polarizantes cruzados, permanecerá el campo oscuro debido a su isotropía.

Así se comportan no sólo los cuerpos amorfos y los del sistema cúbico, sino también los demás según sus direcciones de isotropía o monorrefringencia (según sus ejes ópticos). En los cristales birrefringentes varían los resultados: se extinguen cuatro veces en una vuelta completa de la platina.

Este fenómeno de extinción permite distinguir las maclas, ya que siendo éstas agregados de individuos con diferente orientación, unos se oscurecerán mientras otros permanecerán claros y viceversa. Las maclas polisintéticas de plagioclasas presentan unas estrías características alternativamente claras y oscuras.

3. *Colores de polarización:* Cuando se observa un cristal anisótropo en posición general con respecto a los polarizantes, la luz que le llega del polarizador se resuelve en dos vibraciones perpendiculares que le atraviesan con distinta velocidad, y que al penetrar en el analizador, adquieren una diferencia de fase. Ésta depende de la sustancia y de su espesor. Esas dos ondas interfieren produciendo los colores de Newton (birrefringencia parcial). Si los polaroides se colocan paralelos y el cristal a 45°, se ven los colores complementarios. (Cf. tabla VII).

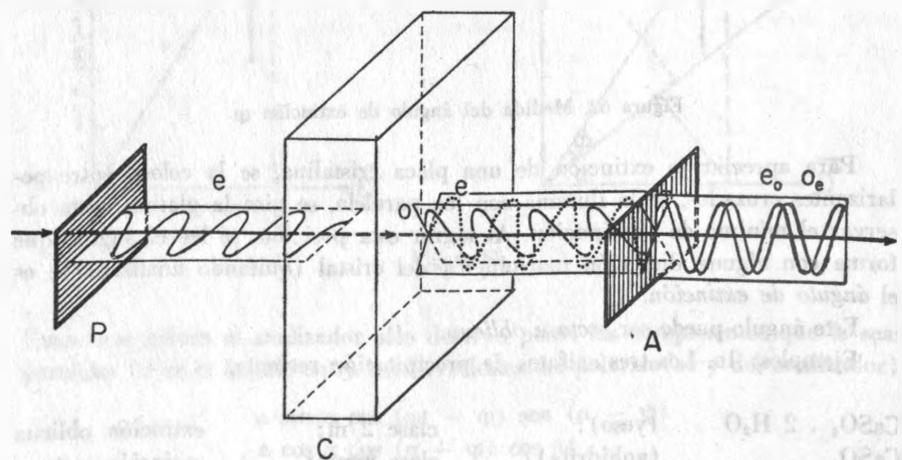


Figura 63. Efecto de la colocación de un cristal (c) birrefringente entre polarizantes (P y A) cruzados.

TABLA VII. ESCALA DE NEWTON CON LOS COLORES DE INTERFERENCIA

Retardo	Cuña a 45° Pol. +	Retardo en λ. Color extinguido	Colores de interferencia		
			Polaroides +	Orden Polaroides	
0			Negro	Blanco brillante	
100			Gris hierro		Blanco
200			Gris espliego		Blanco amarillento
300			Azul grisáceo		Blanco parduzco
	—		Gris	I } Amarillo parduzco	
400	—	Violeta 1λ	Blanco		Rojo claro
	—	Azul 1λ	Amarillo claro		Índigo
500	—		Amarillo	Azul	
	—	Amarillo 1λ	Anaranjado	Verde azul	
			Rojo	Verde pálido	
600	—		Violeta	Amarillo verdoso	
	—		Índigo		Amarillo
700	—	Rojo 1λ	Azul		Anaranjado
	—		Verde	Carmin claro	
800	—	Violeta 2λ	Verde amarillo	II } Rojo púrpura	
	—	Azul 2λ	Amarillo		Púrpura violeta
900	—		Anaranjado	Índigo	
	—		Rojo anaranjado	Azul oscuro	
1000	—		Rojo violeta oscuro	Azul verdoso	
1100	—			Verde	
1200	—	Amarillo 2λ		Amarillo pálido	
	—	Violeta 3λ	Índigo		Color carne
1300	—		Azul verdoso		III } Violeta
	—		Verde	Azul grisáceo	
1400	—	Azul 3λ	Amarillo verdoso	Verde	
	—	Rojo 2λ	Carmin	Verde mar mate	
1500	—		Púrpura mate		
1600	—	Violeta 4λ			

1700	—	Amarillo 3λ Azul 4λ		
1800	—			
1900	—	Azul gris	IV {	
	—	Verde azulado		
2000	—	Violeta 5λ		Amarillo verdoso
	—	Verde claro		Lila
2100	—	Gris verdoso		Carmín
	—	Gris blancuzco		Rojo grisáceo
2200	—	Rojo 3λ	Gris azulado	
	—		Verde	
	—	Amarillo 4λ Azul 5λ		
2300	—			

4. *Compensadores:* Se llama compensador a un cristal tallado en bisel de modo que una de sus direcciones D' o D'' sean la arista de la cuña. Al desplazarla entre polaroides cruzados y a 45° de sus direcciones de vibración de éstos, vaya creciendo,

$$\Delta = e (n' - n'') \quad \Delta = \text{retardo}$$

$$e = \text{espesor}$$

y con luz blanca paralela se verán pasar los colores de interferencia de la escala de Newton.

Cuando se coloca un cristal en extinción entre polarizantes cruzados y luego se le gira 45° (hasta su máxima claridad), al superponerle paralelamente una lámina auxiliar de retardo Δ_1 conocido y con direcciones D'_1 y D''_1 de rápidas y lentas vibraciones también conocidas:

a) si los índices mayores de cada una coinciden, habrá aumento de Δ (adición) y la tinta resultante subirá en la escala de Newton.

b) si un índice grande de una lámina corresponde con el pequeño de la otra, habrá compensación, y la tinta baja.

Hay tres tipos de láminas compensadoras o auxiliares:

Lámina $\lambda/4$ para el amarillo medio del espectro. Su color es gris, entre polarizantes cruzados. Permite determinaciones cuando el color de la lámina del problema esté entre el blanco de I orden y el III orden.

Lámina tinta sensible, $\Delta = \lambda = 0.599 \mu$. Hace variar la tinta inicial de la lámina problema, del rojo al azul (el primero con compensación y éste con adición).

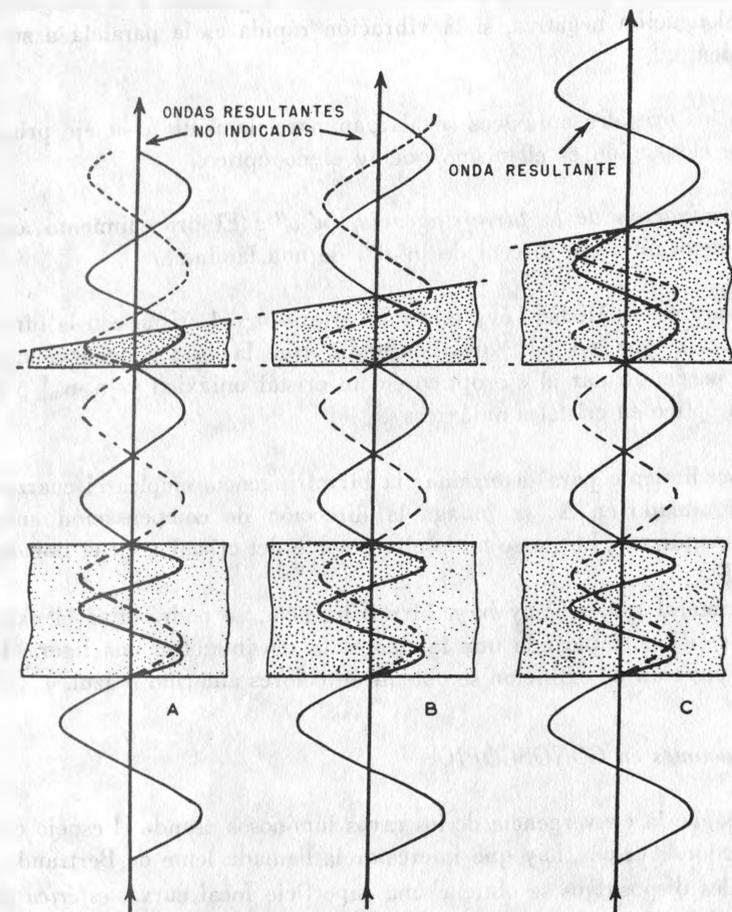


Figura 64. Efecto de la compensación por una cuña de cuarzo. La diferencia de fase producida por una placa cristalina se nulifica por la cuña de cuarzo en la posición c.

Lámina compensadora de cuña de cuarzo. Todas las tintas de una lámina (particularmente las de órdenes elevadas) pueden llevarse al negro al colocar la cuña de cuarzo en posición de compensación. Como los granos varían en grosor, pueden aparecer los colores de polarización como contornos: en "adición" los colores se mueven hacia afuera; en "compensación" hacia adentro.

5. *Signo de elongación:* Los cristales prismáticos que tienen direcciones de vibración paralela y normal a su longitud (ortoclínicos y uniáxicos), son:

- de elongación positiva si la vibración lenta es paralela a su alargamiento.
- de elongación negativa, si la vibración rápida es la paralela a su alargamiento.

Cuando los cristales uniáxicos se alargan paralelamente a su eje principal, su signo de elongación es el mismo que su signo óptico.

6. *Determinación de la birrefringencia, $|n'-n''|$* : El procedimiento anterior permite la determinación directa de $|n'-n''|$ de una lámina.

El nomograma de Michel-Lévy relaciona el grosor del cristal con la birrefringencia total, que no hay que confundir con la birrefringencia máxima ($|n_e-n_o|$ perpendicular al eje óptico en un cristal uniáxico y $|n_g-n_m|$ paralelo al plano óptico en cristales uniáxicos).

Un procedimiento para determinar la birrefringencia emplea el cuarzo compensador graduado en Δ : se indaga la dirección de compensación anotando el Δ correspondiente. Luego se mide el espesor e del cristal y en el nomograma se lee $|n'-n''|$.

Si el mineral tuviese muy baja birrefringencia, se podrá fijar la extinción con más precisión empleando una lámina tinta sensible: con una ligera desviación de la posición de extinción se obtendrán colores amarillo o azul.

B. *Observaciones en CONOSCOPIO:*

Se consigue la convergencia de los rayos luminosos usando el espejo cóncavo y condensador. Además, hay que intercalar la llamada lente de Bertrand.

Con tales dispositivos se obtiene una superficie focal curva, *esférica* en primera aproximación.

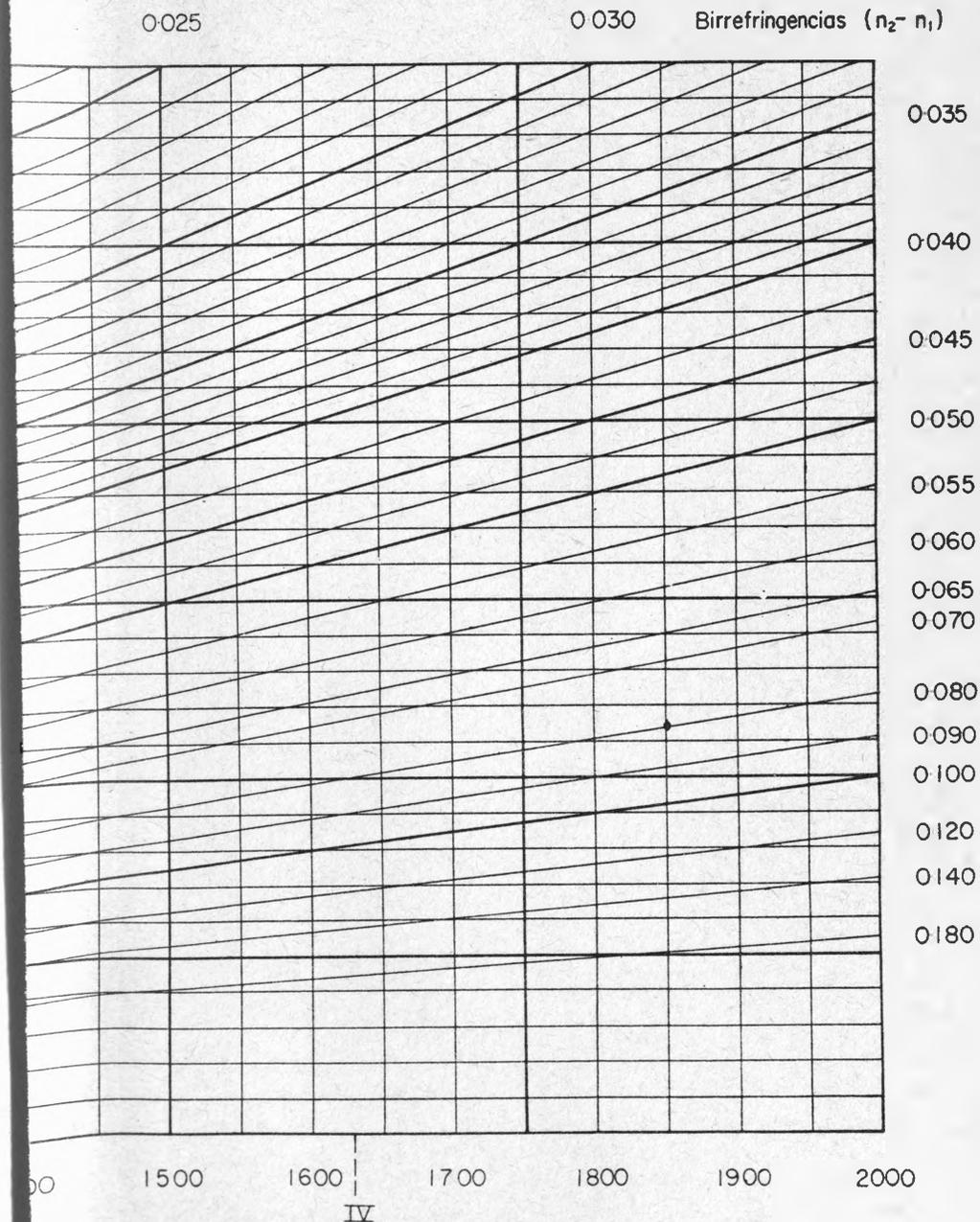
Si se marcan en la superficie esférica focal las direcciones de extinción correspondientes a cada uno de sus puntos, se obtiene un globo cuyos meridianos señalarán los rayos extraordinarios y cuyos paralelos los ordinarios ya que vibran perpendicularmente a los anteriores.

La figura resultante se denomina *esquiódromo de Becke*.

Para la construcción del esquiódromo de un cristal biáxico, ha de hacerse el trazado teniendo en cuenta la existencia de dos ejes ópticos.

En el conoscopio se observa un sector de esquiódromo.

Comportamiento de los cristales entre polarizantes cruzados. Los cristales



- de elongación positiva si la vibración lenta es paralela a su alargamiento.
- de elongación negativa, si la vibración rápida es la paralela a su alargamiento.

Cuando los cristales uniaxiales se alargan paralelamente a su eje principal, su signo de elongación es el mismo que su signo óptico.

6. *Determinación de la birrefringencia, $|n'-n''|$:* El procedimiento anterior permite la determinación directa de $|n'-n''|$ de una lámina.

El nomograma de Michel-Lévy relaciona el grosor del cristal con la birrefringencia total, que no hay que confundir con la birrefringencia máxima (n_e-n_o) perpendicular al eje óptico en un cristal uniaxial y $|n_x-n_y|$ paralelo al plano óptico en cristales uniaxiales).

Un procedimiento para determinar la birrefringencia emplea el cuarzo compensador graduado en Δ : se indaga la dirección de compensación anotando el Δ correspondiente. Luego se mide el espesor e del cristal y en el nomograma se lee $|n'-n''|$.

Si el mineral tuviese muy baja birrefringencia, se podrá fijar la extinción con más precisión empleando una lámina tinta sensible: con una ligera desviación de la posición de extinción se obtendrán colores amarillo o azul.

B. Observaciones en CONOSCOPIO:

Se consigue la convergencia de los rayos luminosos usando el espejo cóncavo y condensador. Además, hay que intercalar la llamada lente de Bertrand.

Con tales dispositivos se obtiene una superficie focal curva, esférica en primera aproximación.

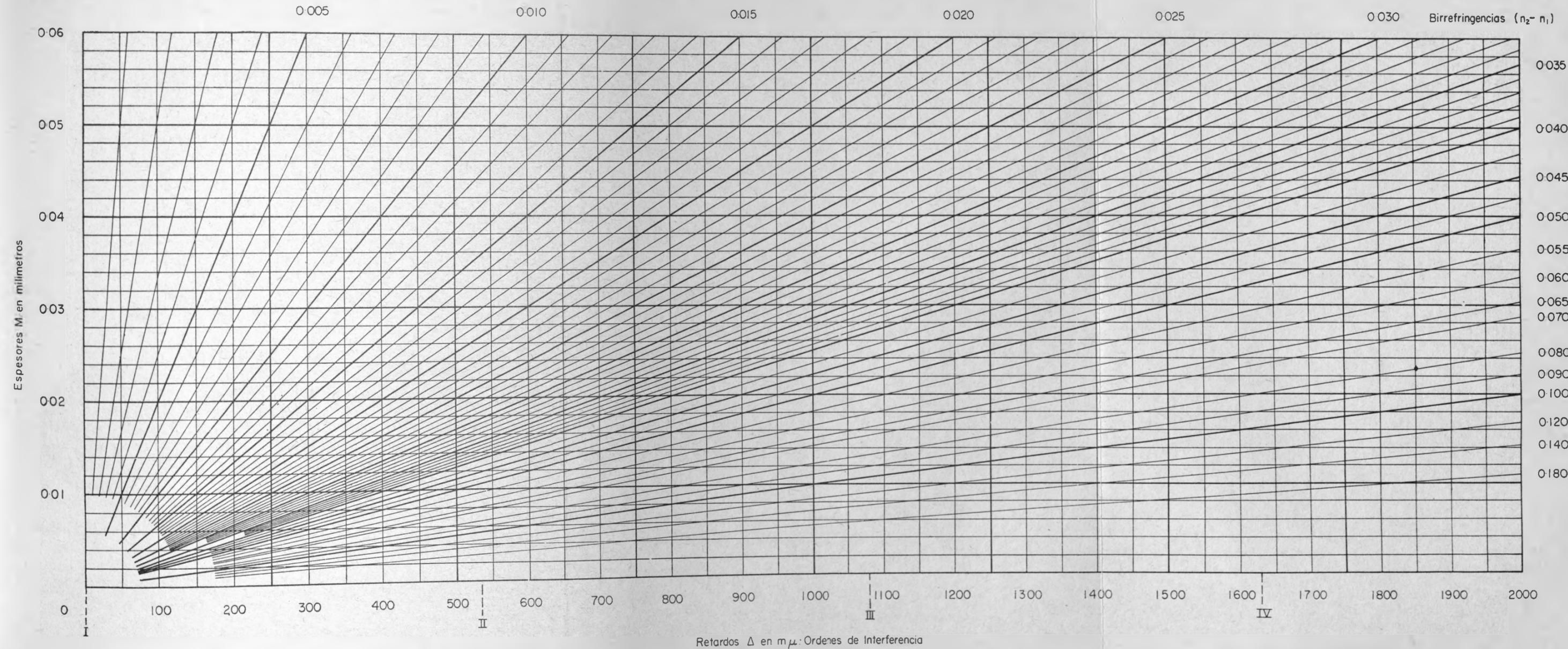
Si se marcan en la superficie esférica focal las direcciones de extinción correspondientes a cada uno de sus puntos, se obtiene un globo cuyos meridianos señalarán los rayos extraordinarios y cuyos paralelos los ordinarios, ya que vibran perpendicularmente a los anteriores.

La figura resultante se denomina *esquidromo de Becke*.

Para la construcción del esquidromo de un cristal biaxial, ha de hacerse el trazado teniendo en cuenta la existencia de dos ejes ópticos.

En el conoscopio se observa un sector de esquidromo.

Comportamiento de los cristales entre polarizantes cruzados. Los cristales



isótopos no tienen tampoco en el conoscopio influencia alguna, como se vio no la tenían en el ortoscopio: sigue el campo oscuro.

Entre los anisótopos se tratará primero de *crisales uniáxicos*.

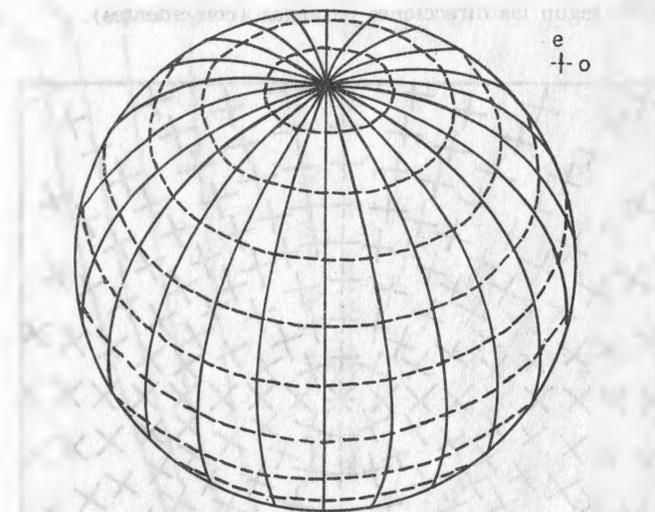


Figura 66. Red del esquiódromo de un cristal uniáxico, proyectado en inclinación sobre su eje óptico.

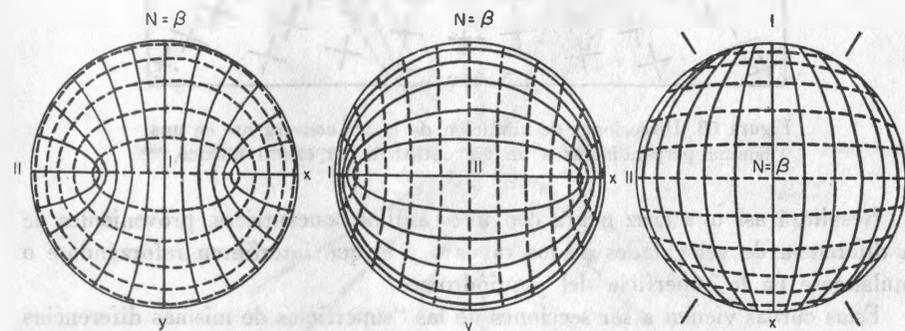


Figura 67. Red del esquiódromo según los tres planos de la indicatriz de un cristal biáxico,

Para $\gamma = 1$. Bisectriz (opt. positiv.) significa:

- rayo rápido
- rayo lento

Para $\alpha = 1$. Bisectriz (opt. negat.) significa:

- rayo rápido
- rayo lento

Colocando idealmente su esquiódromo en el microscopio de modo que el eje del instrumento sea paralelo al eje óptico del cristal, aparecerán claros en el campo oscuro de los polarizantes cruzados todos los puntos de la esfera cuya cruz de vibración sea oblicua a las direcciones de los polarizantes, mientras habrá extinción según las direcciones paralelas (coincidentes).

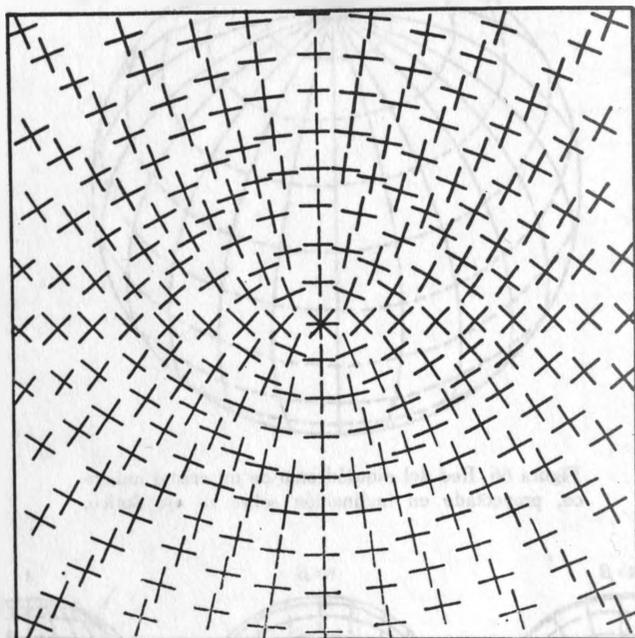


Figura 68. Direcciones de vibración de la luz convergente en una lámina perpendicular a un eje óptico de un cristal biáxico.

Resultará así una cruz negra con unos anillos concéntricos, provenientes de la diferencia de velocidades de los rayos o y e , que interfieren reforzándose o anulándose en la superficie del esquiódromo.

Estas curvas vienen a ser secciones de las "superficies de mismas diferencias de camino" (superficies de Bertin).

La dirección del eje principal es una dirección de isotropía, hay monorrefringencia.

Los anillos de interferencia dependen del grado de birrefringencia. Cristales muy birrefringentes tienen superficies de Bertin muy próximas (anillos apretados), mientras cristales de débil birrefringencia o placas delgadas tienen el primer anillo ya muy alejado y aún fuera del campo.

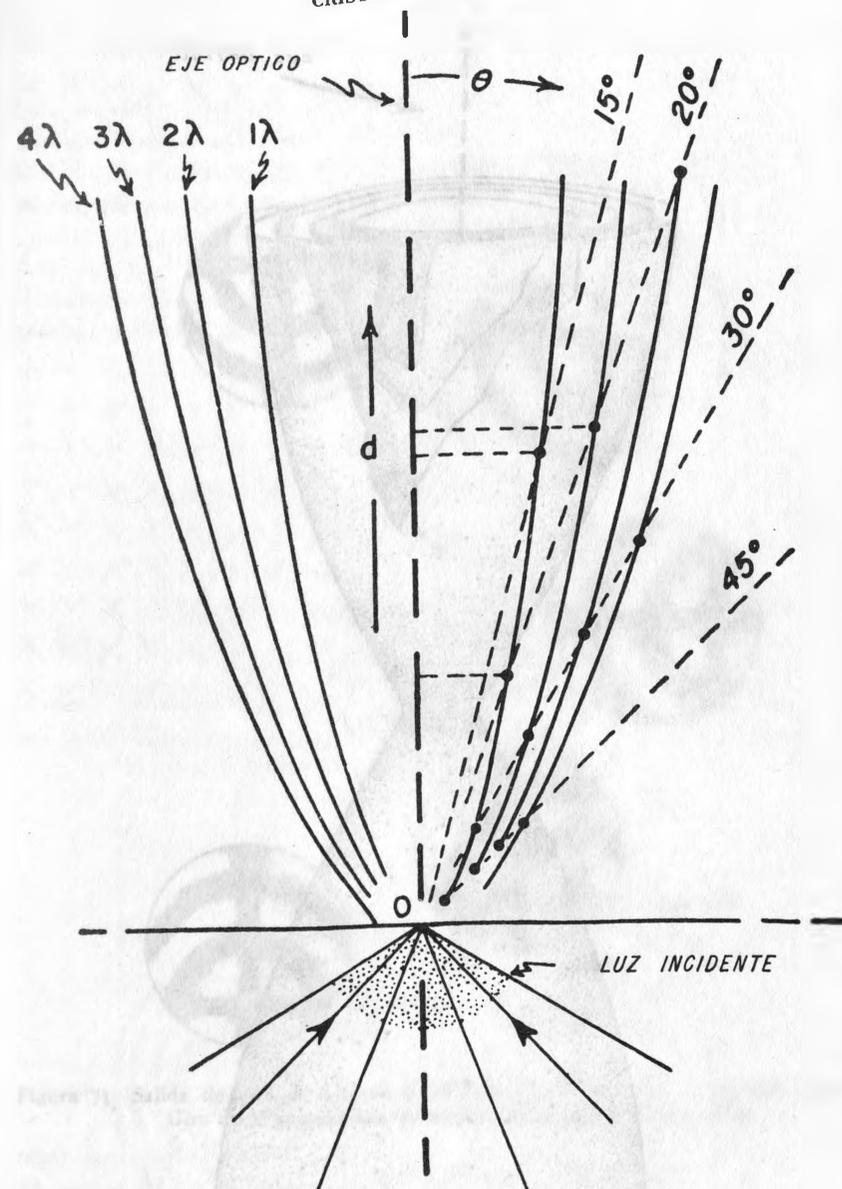


Figura 69. Curvas de igual diferencia de fase (igual retardo) en la sección principal de un cristal uniáxico. En coordenadas polares:

$$\Delta = p\lambda = d \operatorname{tg}^2\theta (n_o - n_e) \operatorname{sec}\theta.$$

Aquí p es un número entero; d = espesor de la placa; $(n_o - n_e)$ = birrefringencia.

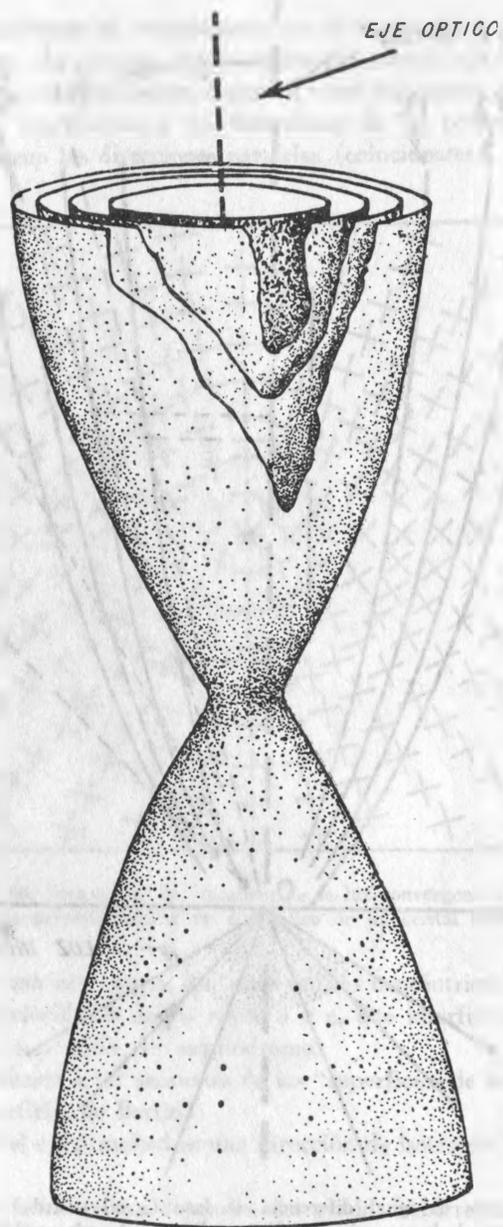


Figura 70. Superficies de Bertin para un cristal uniaxial. Indican los retardos de $1\lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$

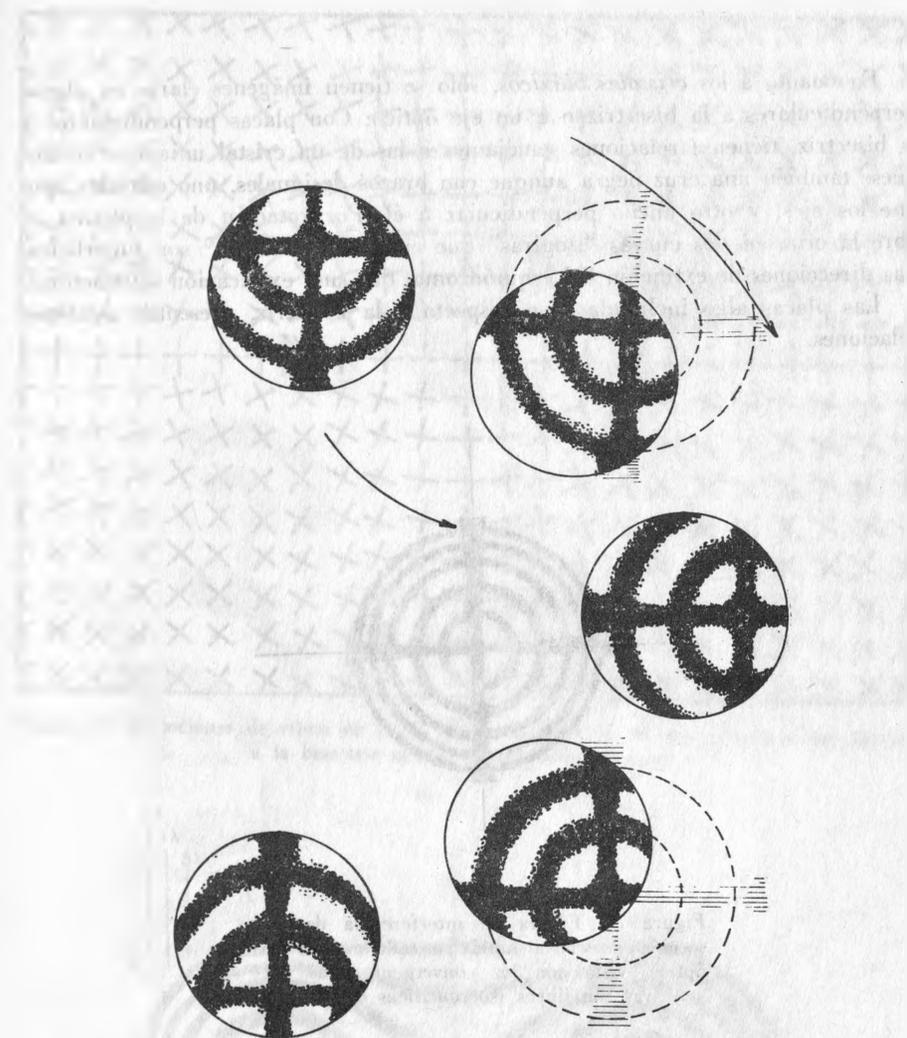


Figura 71. Salida de ejes de un cristal uniaxial, inclinado con el eje del microscopio. Giro de la preparación en sentido de las agujas de un reloj.

En cuanto a los *crisales biáxicos*, sólo se tienen imágenes claras en placas perpendiculares a la bisectriz o a un eje óptico. Con placas perpendiculares a la bisectriz, tiénense relaciones semejantes a las de un cristal uniáxico: distínguese también una cruz negra aunque con brazos desiguales, uno estrecho, que une los ejes, y otro ancho perpendicular a él. Por rotación de la platina se abre la cruz en dos curvas "isogiras" que en posición de 45° son hipérbolas. Las direcciones de extinción del esquiódromo, dan una explicación satisfactoria.

Las placas algo inclinadas con respecto a la bisectriz, presentan análogas relaciones.

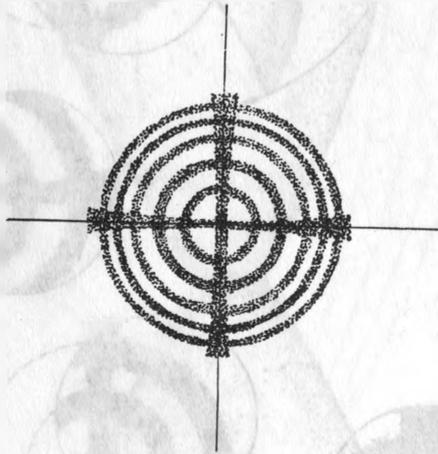


Figura 72. Figura de interferencia de una sección de cristal uniáxico tallado \perp al eje óptico, vista con luz convergente. Las curvas son líneas isocromáticas de $||$.

Son de particular interés las placas normales a un solo eje; al girar la platina, se ve la isogira que barre el campo.

El espacio no ocupado por la cruz, lo está por anillos concéntricos (apretados en placas gruesas o muy birrefringentes y espaciados en las otras) formando óvalos de Cassini o lemniscatas en sentido amplio.

En la Fig. 77 se ve la superficie de Bertin correspondiente. Puede tenerse como la unión de dos superficies propias de cristales uniáxicos.

Considérense las secciones B (placas gruesas), y las C (placas finas).

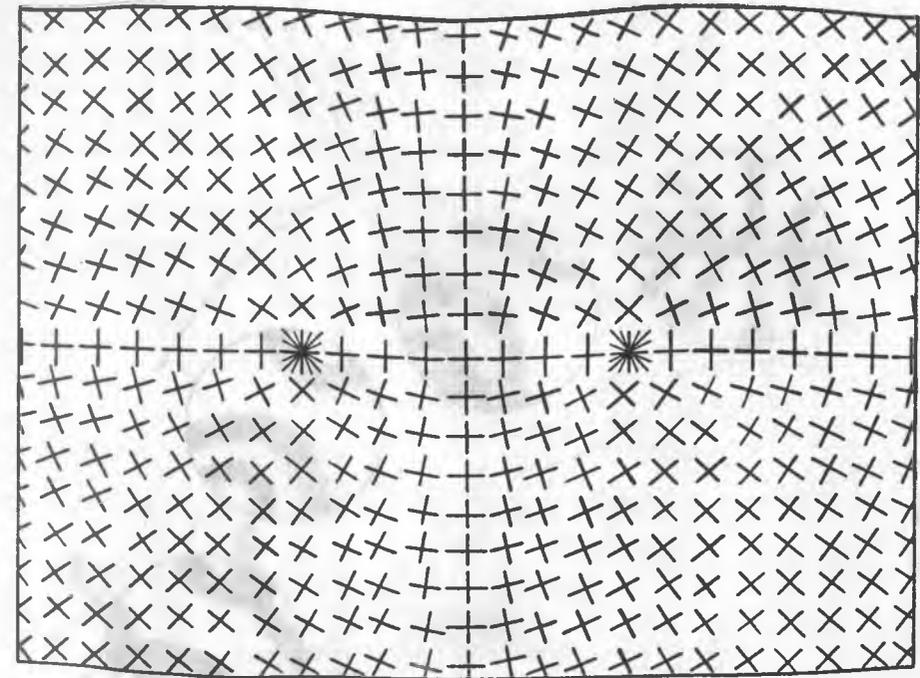


Figura 73. Direcciones de vibración de la luz (convergente) en una lámina perpendicular a la bisectriz aguda en un cristal biáxico.

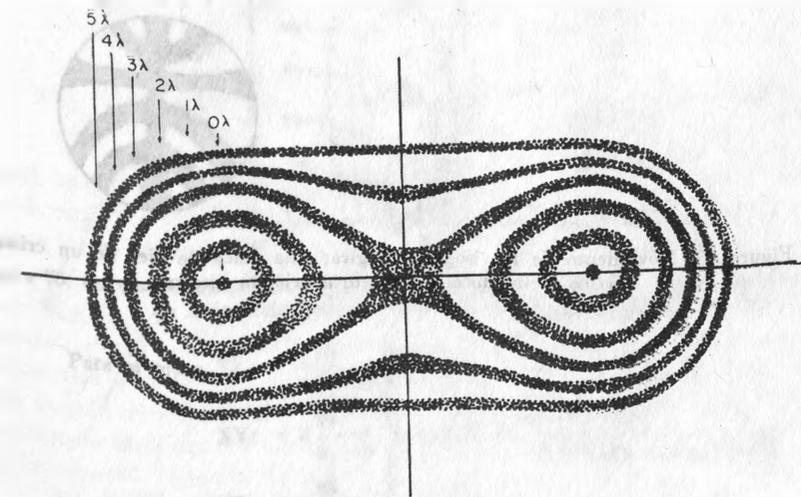


Figura 74. Curvas de Cassini.

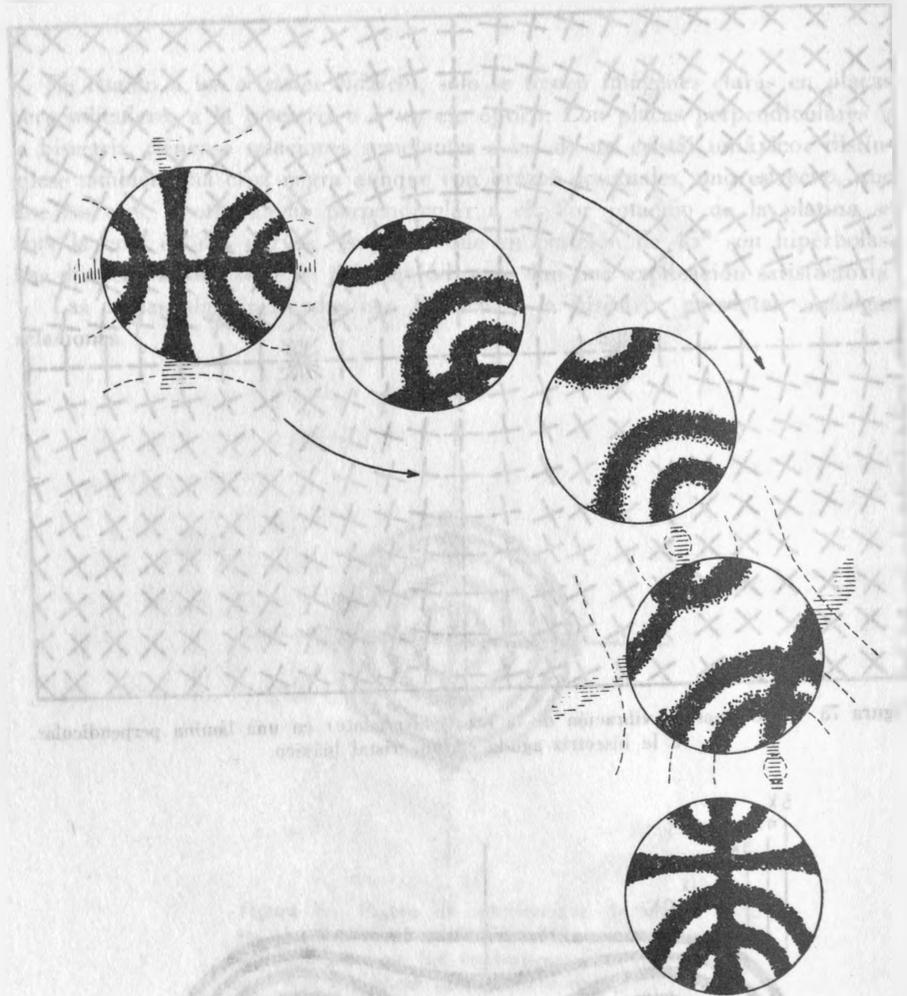


Figura 75. Movimiento de las isogiras al girar una placa de ejes de un cristal biáxico inclinado con respecto a primera bisectriz.

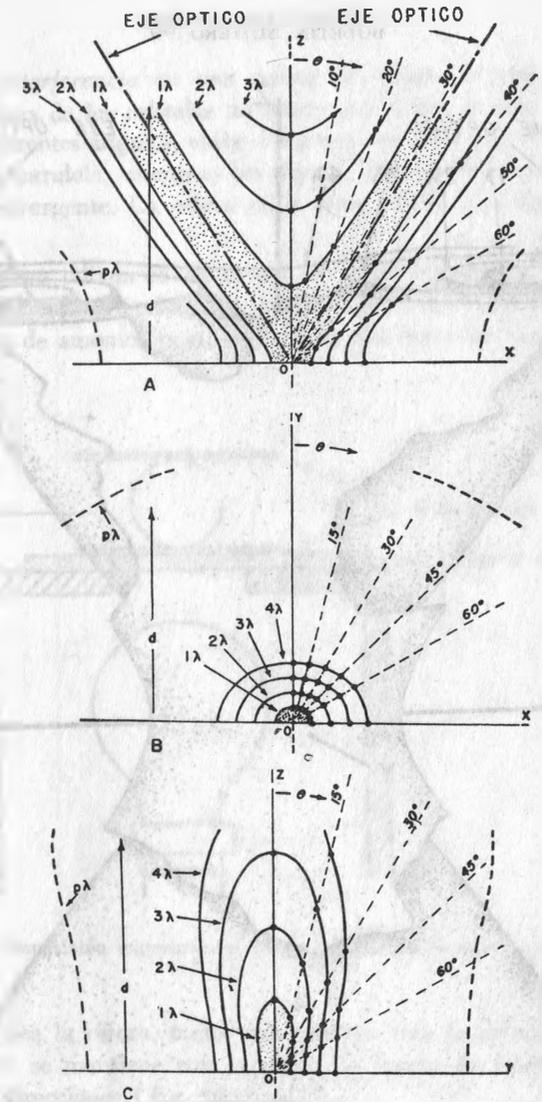


Figura 76. Curvas de misma diferencia de fase (retardo) sobre los tres planos de simetría de la indicatriz biáxica: (p es un entero cualquiera)

$$\left. \begin{aligned}
 \text{Para el plano XZ: } t &= \frac{p\lambda}{n_y - N} \\
 \text{XY: } t &= \frac{p\lambda}{n_z - N} \\
 \text{YZ: } t &= \frac{p\lambda}{N - n_x}
 \end{aligned} \right\} \text{ con } N^2 = \frac{(n_x)^2 \cdot (n_z)^2}{(n_x)^2 \text{sen}^2\theta + (n_z)^2 \text{cos}^2\theta}$$

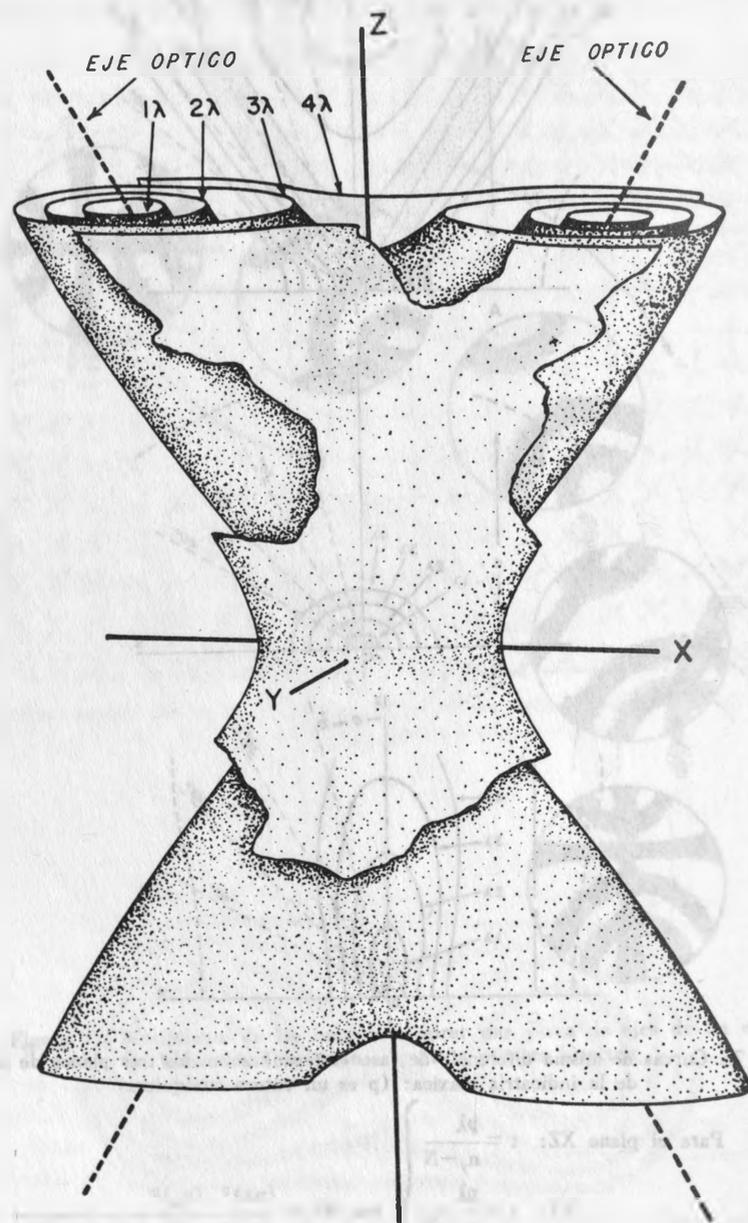


Figura 77. Superficies de Bertin para un cristal biáxico. Indican los retardos de 1λ , 2λ , 3λ , ...

Figuras de interferencia en una esfera de cristal. Se pueden estudiar las propiedades ópticas de los cristales mediante una esfera monocristalina, directamente y bajo diferentes ángulos, entre dos placas de polaroide. Las observaciones se hacen en luz paralela, mientras las figuras de interferencia aparecen como vistas en luz convergente. La esfera obra como objeto investigado y como colector de luz.

En vez de esfera tallada en un cristal, se puede emplear una de vidrio colocada sobre una placa de cristal de tamaño suficiente (mica, cuarzo, sal de Rochelle, fosfato de amonio, yeso, etc.), todo ello entre las placas de polaroide.

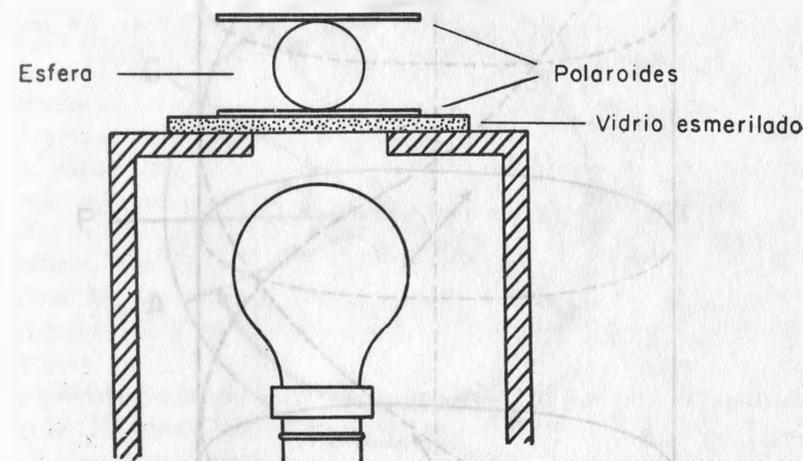


Figura 78. Disposición experimental para observar las figuras de interferencia.

Cuanto mayor sea la esfera, tanto más efectiva será la demostración. Si el polaroide superior se mantiene con la mano, la figura de interferencia se podrá ver por todas direcciones. (fig. 78)

Polarización rotatoria. Las placas gruesas de cuarzo, perpendiculares al eje óptico, no dan oscuridad como era de esperar al observarlas entre polaroides cruzados, sino claridad y colores de interferencia. Con luz monocromática se obtiene una posición de oscurecimiento al girar el analizador cierto determinado ángulo. Así que según el eje del cuarzo no hay monorrefringencia sino birrefringencia, sufriendo además una torsión el plano de vibración de la luz que lo recorre: "rotación óptica".

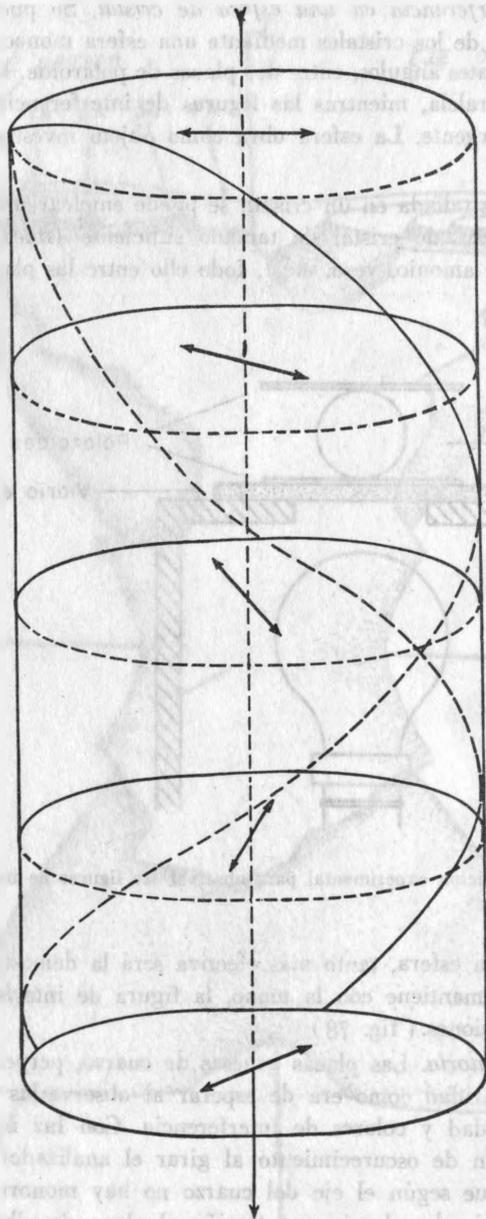


Figura 79.

La onda polarizada linealmente que sale de una placa cristalina, puede interpretarse como la resultante de dos ondas polarizadas circularmente, en sentido opuesto y con la misma velocidad. (Fig. 79)

Tratando cristales con poder rotatorio, la situación es diferente: —según el eje de isotropía (hipótesis de Fresnel) se supone que las dos vibraciones circulares inversas (vectores \vec{D}) giran a velocidades diferentes, mientras se propagan por la normal al plano de onda con la misma velocidad (índicesⁿ dextrógiroⁿ levógiro). (Fig. 80)

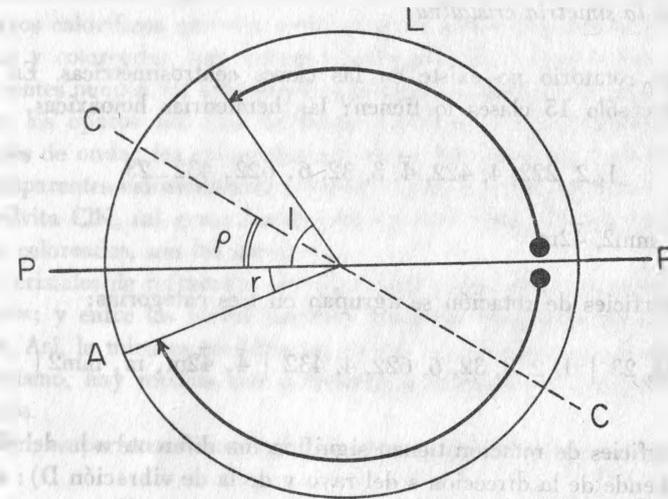


Figura 80. Movimiento de los rayos en un cuerpo con polarización rotatoria.

Ello lleva a la rotación ρ del plano de polarización.

$$\rho = \frac{\pi e}{\lambda} (n_d - n_l) = e \rho_0; \quad e = \text{espesor de lámina}$$

según cualesquiera otras direcciones, las dos vibraciones circulares se transforman en vibraciones elípticas y cada una de ellas degenera en una vibración polarizada linealmente.

El poder rotatorio específico ρ_0 puede ser derecho (dextrógiro), o izquierdo (levógiro); se llama derecho cuando $\rho_0 > 0$, si el polarizador del microscopio debe girarse en sentido de las agujas del reloj para llegar a extinción (con luz monocromática).

Los ángulos de rotación son diferentes con las diferentes clases de luz (con roja menor que con violeta).

El fenómeno se presenta tanto en el ortoscopio como en el conoscopio. En este caso, la figura se aprecia muy débil en su centro, dentro del primer anillo.

Cuando se inserta en el conoscopio una placa compensadora de mica $\lambda/4$, se obtiene una figura espiral de interferencia, que puede ser dextrógira o levógira.

Al superponer dos placas del mismo cristal, una dextrógira y otra levógira, se obtienen las "espirales de AIRY".

Su relación con la simetría cristalina

1. El poder rotatorio no existe en las clases centrosimétricas. En las no centrosimétricas, sólo 15 clases lo tienen: las hemiedrías holoáxicas,

$$1, 2, 222, 4, 422, \bar{4}, 3, 32, 6, 622, 432, 23$$

y las clases $m, mm2, \bar{4}2m$.

2. Las superficies de rotación se agrupan en tres categorías:

$$| 432, 23 | 1, 2, 3, 32, 6, 622, 4, 432 | \bar{4}, \bar{4}2m, m, mm2 |$$

3. Las superficies de rotación tienen significación diferente a la del elipsoide de índices (depende de la dirección s del rayo y de la de vibración D): el valor de la rotación g está ligada directamente a la rotación específica ρ_0 .

4. Los cristales con poder rotatorio tienen formas enantiomorfas (cuarzo), moléculas sin plano ni centro de simetría.

TABLA VIII. EJEMPLOS DE CRISTALES CON PODER ROTATORIO

Cristales	Clase	Dirección	Rotación (luz Na)
Cuarzo (SiO_2)	$32 \cdot D_3$	Un eje óptico	$21^\circ 44'$
Cinatrio (HgS)	$32 \cdot D_3$	Un eje óptico	325° (luz roja)
NaClO_3	$23 \cdot T$	Eje ternario	$3^\circ 8'$
Sal de Rochelle	$222 \cdot D_2$	Ambos ejes ópticos	$- 1.35^\circ$
Azúcar	$2 \cdot C_2$	Ambos ejes ópticos	$- 1.6^\circ$ y $+ 5.4^\circ$

En una sección de cuarzo a $56^\circ 10'$ del eje principal, no hay rotación.

PROPIEDADES TÉRMICAS DE LOS CRISTALES

A. Comportamiento de los cristales con respecto a los rayos caloríficos:

En los rayos caloríficos se dan como en los luminosos, diferentes longitudes de onda: ocupan la región de los "rayos infrarrojos" en el espectro.

No es de extrañar que los cristales se comporten de igual modo con respecto a los rayos caloríficos que con respecto a los luminosos. Así como hay cristales incoloros y coloreados, hay cuerpos transparentes y opacos para el calor. Los transparentes pueden ser atravesados por rayos caloríficos en capas relativamente gruesas; los opacos no. Los incoloros absorben rayos caloríficos de distintas longitudes de onda; los coloreados sólo muy determinadas radiaciones.

Transparentes calóricamente o diatermanos y al mismo tiempo incoloros, son p. ej., silvita CaF_2 , sal gema NaCl , plata córnea ClAg , blenda ZnS ; casi opacos y a más coloreados, son los alumbres.

Hay cristales de refracción sencilla y doble, también con relación a los rayos caloríficos; y entre los birrefringentes pueden distinguirse los uniaxiales de los biaxiales. Así, la mica es también un cristal birrefringente para el calor.

Asimismo, hay medios con polarización rotatoria con respecto a los rayos caloríficos.

En fin, es perfecta la analogía de comportamiento para unos y otros rayos.

B. Conducción de la energía en los cristales:

La mayoría de los estudios sobre el mecanismo de la conducción de la energía por los cristales, se aplica tanto a la conducción del calor cuanto a la electricidad y al magnetismo (inducción).

Los cuerpos isótropos presentan con respecto a la conducción de la energía, igual resistencia específica en todas direcciones, mientras en los anisótropos varía con la dirección.

En medio isótropo: Se ha demostrado experimentalmente que en un medio isótropo, la cantidad de energía transmitida es proporcional a su gradiente en la dirección de propagación. Esta propiedad puede expresarse en general por la relación lineal,

$$\vec{E} = P \cdot \vec{A} \quad (1)$$

o sea, que una magnitud vectorial \vec{E} se relaciona con otra \vec{A} mediante un escalar P.

Así, el campo eléctrico \vec{E} produce un vector de inducción eléctrica \vec{D} que le es paralelo y del mismo sentido,

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

$\epsilon =$ constante dieléctrica del medio

El vector de campo magnético \vec{H} se vincula con el de inducción magnética B por,

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

También, la conductibilidad térmica k relaciona al vector gradiente de temperatura con el flujo vectorial de calor h,

$$\vec{h} = -k \frac{\delta T}{\delta x}$$

que referido a unos ejes ortogonales,

$$h_1 = k \frac{\delta T}{\delta x_1} ; h_2 = k \frac{\delta T}{\delta x_2} ; h_3 = k \frac{\delta T}{\delta x_3}$$

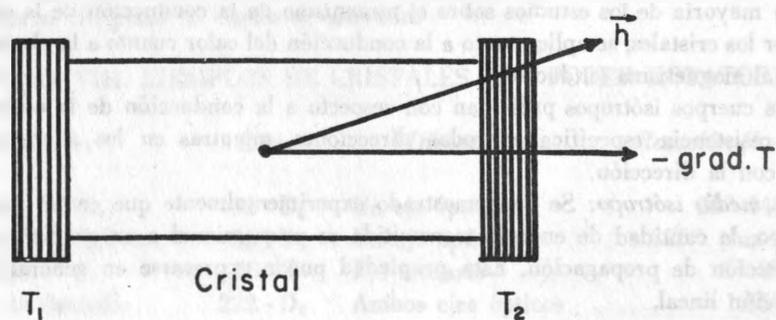


Figura 81. Propagación del calor en medio anisótropo: el flujo \vec{h} no tiene la misma dirección que el gradiente de temperatura que induce.

En medio anisótropo: En un medio anisótropo, los vectores \vec{E} y \vec{A} de (1) no son necesariamente colineales.

Así, el flujo de calor \vec{h} en un cristal, no tiene la misma dirección que el vector gradiente de temperatura que induce,

T_1, T_2 placas conductoras a diferentes temperaturas

Los vectores de inducción eléctrica \vec{D} y de campo eléctrico \vec{E} , no necesariamente colineales, tienen sus respectivas componentes en un sistema ortogonal,

$$\vec{D} \begin{cases} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{cases} \quad \vec{E} \begin{cases} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{cases}$$

y sus relaciones mutuas son, (Fig. 82)

$$D_1 = \epsilon_{11} E_1 + \epsilon_{12} E_2 + \epsilon_{13} E_3$$

$$D_2 = \epsilon_{21} E_1 + \epsilon_{22} E_2 + \epsilon_{23} E_3$$

$$D_3 = \epsilon_{31} E_1 + \epsilon_{32} E_2 + \epsilon_{33} E_3$$

en notación matricial,

$$\vec{D} = [\epsilon] \vec{E}$$

con,

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2)$$

es un cuadro de nueve magnitudes físicas, llamado *tensor dieléctrico* de orden 2 (o sea, de 2ª componentes).

En el cuadro siguiente se generalizan para medios anisótropos las relaciones aducidas en el párrafo anterior para medios isotrópicos.

TABLA IX. GENERALIZACIÓN DE LAS RELACIONES PARA MEDIOS ANISÓTROPOS

Tensor	Vector aplicado	Vector reducido	Relación
Constante dieléctrica [ε]	Campo eléctrico \vec{E}	Inducción eléctrica \vec{D}	$\vec{D} = [\epsilon] \vec{E}$
Impermeabilidad dieléctrica [κ]	Inducción eléctrica \vec{D}	Campo eléctrico \vec{E}	$\vec{E} = [\kappa] \vec{D}$
Susceptibilidad magnética [χ]	Campo magnético \vec{H}	Imantación \vec{J}	$\vec{J} = [\chi] \vec{H}$
Permeabilidad magnética [μ]	Campo magnético \vec{H}	Inducción magnética \vec{B}	$\vec{B} = [\mu] \vec{H}$
Impermeabilidad magnética [M]	Inducción magnética \vec{B}	Campo magnético \vec{H}	$\vec{H} = [M] \vec{B}$
Conductibilidad eléctrica [σ]	Campo eléctrico \vec{E}	Corriente eléctrica \vec{i}	$\vec{i} = [\sigma] \vec{E}$
Resistividad eléctrica [ρ]	Corriente eléctrica \vec{i}	Campo eléctrico \vec{E}	$\vec{E} = [\rho] \vec{i}$
Conductibilidad térmica [K]	Gradiente de temperatura $\delta\vec{T}/\delta\vec{x}$	Flujo vectorial de calor \vec{h}	$\vec{h} = [K] (\delta\vec{T}/\delta\vec{x})$
Resistividad térmica [R]	Flujo vectorial de calor \vec{h}	Gradiente de temperatura $\delta\vec{T}/\delta\vec{x}$	$\delta\vec{T}/\delta\vec{x} = [R] \vec{h}$

Entre los tensores del cuadro se tienen las siguientes relaciones:

$$[\epsilon] = [K]^{-1}$$

$$[\mu] = [\chi]^{-1}$$

$$[\sigma] = [\rho]^{-1}$$

$$[K] = [R]^{-1}$$

* Las cantidades [] son II-tensores.

Ejemplos:

TABLA X. SUSCEPTIBILIDAD MAGNÉTICA: en $4 \cdot 10^{-12}$ C. G. S. Gauss

Minerales	Magnetismo	Clase	Componentes
Cuarzo, SiO ₂	Dia	32	$\chi_{11} = \chi_{22} = - 1.51; \chi_{33} = - 1.53$
Calcita, CaCO ₃	Dia	3m	$\chi_{11} = \chi_{22} = - 1.24; \chi_{33} = - 1.38$
Cd	Dia	6/mmm	$\chi_{11} = \chi_{22} = - 1.74; \chi_{33} = - 2.85$
Be	Para	6/mmm	$\chi_{11} = \chi_{22} = + 2.76; \chi_{33} = + 1.29$
Rutilo, TiO ₂	Para	4/mmm	$\chi_{11} = \chi_{22} = + 10.50; \chi_{33} = + 11.02$
Aragonito, CaCO ₃	Dia	mmm	$\chi_{11} = - 1.44; \chi_{22} = - 1.42; \chi_{33} = - 1.63$
CaF ₂	Dia	m3m	$\chi_{11} = \chi_{22} = \chi_{33} = - 1.14$

Ciertas especies monoclinicas o triclinicas pueden ser simultáneamente diamagnéticas y paramagnéticas, según dos direcciones principales; su indicatriz no es un elipsoide.

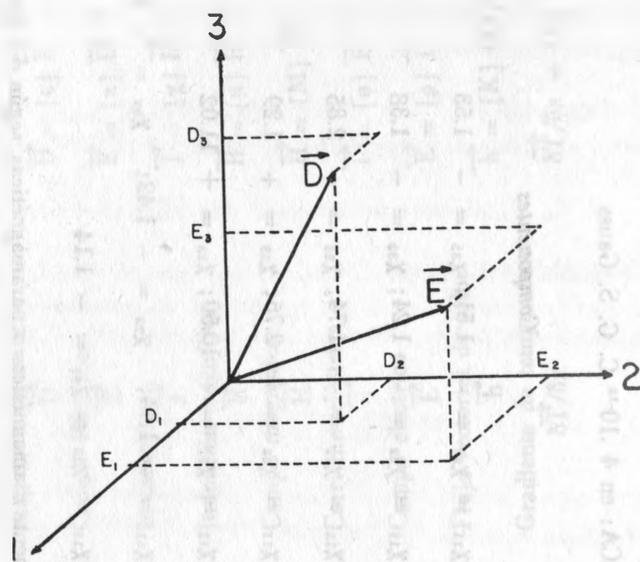


Figura 82. Relación entre el vector de inducción eléctrica \vec{D} y el campo eléctrico \vec{E} en un cristal.

TABLA XI. CONSTANTES DIELECTRICAS ϵ/ϵ_0 RELATIVAS

Minerales	ϵ_{11}	ϵ_{22}	ϵ_{33}	Frecuencia
Aragonito	9.8	7.7	6.6	$4 \cdot 10^8$
Cuarzo	4.5		4.6	50 a $5 \cdot 10^6$
Calcita	8.5		8.0	$4 \cdot 10^8$
Rutilo	89.0		173.0	$4 \cdot 10^8$
Halita		5.6		$2 \cdot 10^7$

TABLA XII. CONDUCTIBILIDAD TÉRMICA k en 10^9 erg/cm seg gr

Sustancia	k_{11}	k_{22}	k_{33}	Temperatura
Cuarzo	6.5		11.3	30° C
Calcita	4.18		4.98	30° C
Bi	9.24		6.65	18° C
Grafito	355.0		89.0	30° C
Al		208		30° C

TABLA XIII. RESISTIVIDAD ELÉCTRICA ρ a 20°C (en 10^{-10} ohm/cm)

Sustancia	$\rho_{11} = \rho_{12}$	ρ_{33}
Sn	9.9	14.3
Bi	109.0	138.0
Cd	6.8	8.3
Zn	5.9	6.1

Algunos datos experimentales de conductibilidad

De los estudios realizados en los cristales de sal gema (halita) se deducen conclusiones contrarias a la teoría del elipsoide:

La conductibilidad de dichos cristales es diferente para las direcciones normales a (100), (110) y (111), y por consiguiente, la conductibilidad en los mismos no se puede representar por una esfera. Sin embargo, otras experiencias dan la misma conductibilidad según todas las direcciones, tanto en la sal como en otros minerales cúbicos: quizás los datos anteriores tengan en cuenta la heterogeneidad proveniente de cristal mosaico.

La segunda circunstancia que contradice la teoría del elipsoide de conductibilidad eléctrica, es la constancia con que algunos cristales presentan la *conductibilidad unipolar*, es decir, la distinta conductibilidad que existe en ciertas direcciones si cambia el sentido de la corriente.

Así, los cristales de carborundo (SiC, trig.) muestran una conductibilidad tan distinta para una misma dirección que puede ser 4000 veces mayor en un sentido que en el opuesto. Análogas propiedades presentan los cristales de molibdenita (S_2Mo , hexag.) anatasa (TiO_2 , tetrag.) brookita (TiO_2 , ortoclínica), pirita (SFe, cúb. param.), galena (PbS, cúb. hol.) así como la psilomelana ($Mn_2O_3 \cdot n MnO_2 \cdot m H_2O$ semicristalina, sólida o fibroso-radial). Este fenómeno de la conductibilidad unipolar encuentra aplicación en Radiotelegrafía en que algún "cristal" o más exactamente, un agregado cristalino de ciertos minerales, es utilizado como *detector* para encauzar corrientes variables, aprovechando la existencia de la conductibilidad unipolar en dichos minerales. No obstante, esta propiedad va ligada, tanto a la estructura cristalina como a otros factores diversos (mezclas, heterogeneidad física, asociación con otros cristales carentes de conductibilidad unipolar) que impiden el paso de la corriente, tal como se ha indicado.

Hay que añadir que las mediciones efectuadas en la turmalina (con diferentes propiedades cristalográficas en los dos extremos del eje ternario) dan idéntico valor de la conductibilidad en un sentido como en el opuesto de dicho eje.

El valor numérico de la resistencia específica de los cristales, aparte de las cifras ya citadas para los medianamente conductores (hematita, aproximadamente $\rho = 0.5$ ohmios) y para los conductores (bismuto $\rho = \text{aprox. } 13 \cdot 10^{-9}$ ohm) resulta mucho mayor ρ en los cuerpos dieléctricos (malos conductores). Así, para el cuarzo (SiO_2 , trig. enant) se dan como valores medios:

$$\begin{aligned} \rho \parallel [001] &= 1.3 \times 10^{14} \text{ ohm} \\ \rho \perp [001] &= 3.3 \times 10^{16} \text{ ,,} \end{aligned}$$

Como se ve, a lo largo del eje principal de simetría, pasa la electricidad 300 veces mejor que en la dirección perpendicular a aquélla, estos coeficientes aumentan aún a medida que pasa la corriente.

Respecto a conductibilidad eléctrica, es donde se han encontrado las diferencias de magnitud más enormes entre todos los fenómenos de la naturaleza, porque la variación del poder conductor entre conductores y aisladores, recuerda las diferencias entre las magnitudes ordinarias terrestres y las estelares. La relación entre la conductibilidad específica de la plata a la del cuarzo fundido, considerados como los casos extremos, es del orden de 10^{24} , y con relación al azufre, de 10^{21} .

En igualdad de diámetro, un disco de azufre de un espesor de dos centésimas de milímetro, opone al paso de la electricidad un obstáculo mayor que el que opondría un cable de plata tendido desde la Tierra a la estrella α -Centauri.

Influencia de la temperatura en la conductibilidad eléctrica de los cristales. La conductibilidad eléctrica de los cristales, lo mismo que en otros cuerpos no cristalizados, varía mucho con la temperatura. Al aumentar su conductibilidad específica disminuye su resistividad: así, en la hematita (Fe_2O_3),

t	$\rho \perp [00*1]$	$\rho \parallel [01*1]$
0°	0.408 ohm	0.808 ohm
17°	0.351 ,,	0.687 ,,
100°	0.183 ,,	0.331 ,,

En el cuarzo, a lo largo del eje ternario,

t	$\rho [00*1]$
20°	$1.2 \cdot 10^{14}$ ohm
100°	$8.2 \cdot 10^{11}$,,
300°	$5.6 \cdot 10^7$,,

es decir, al pasar la temperatura de 20° a 100° hay una disminución de resistencia específica de 150 veces su valor, mientras entre 20° y 300° disminuye unas 2 000 000 de veces.

Fundándose en varias experiencias, se ha dado la siguiente fórmula empírica,

$$\log_e \sigma = -\frac{\alpha}{T} + \beta$$

o lo que es lo mismo,

$$\sigma = e \exp\left(-\frac{\alpha}{T} + \beta\right)$$

σ = conductividad eléctrica específica del cristal

T = temprt. absoluta

α, β = constantes de la sustancia

Para la sal gema (CINa) se ha introducido una modificación en la fórmula anterior:

$$\log_e \sigma = at + b$$

o sea,

$$\sigma = e^{at + b}$$

No obstante, se sabe que los metales poseen propiedades inversas: la resistencia específica aumenta con la elevación de temperatura.

Se ha comprobado experimentalmente que en muchos cristales la resistencia específica tiene un valor mínimo para cierta temperatura, de modo que aumenta o disminuye aquella por elevación de temperatura, según el lado de 0° en que se encuentra el mínimo.

En la pirita (FeS_2) por ej., el mínimo de ρ se observa entre 0° y 20° de modo que de un lado de estas temperaturas aumenta ρ y del otro lado descende.

Se ha dado la siguiente fórmula aproximada:

$$\rho = A (1 + at + bt^2) e^{c/T}$$

En resumen, la dependencia entre resistencia y temperatura no aparece muy clara. Confírmase la posibilidad de que la conductibilidad electrónica de los metales y la iónica de las sales se sujetan a leyes diferentes.

C. La dilatación de los cristales

Al calentar un cristal se comunica energía a las partículas reticulares que lo constituyen, con lo que se incrementan sus vibraciones. Como las fuerzas de atracción y de repulsión mutua de los átomos no son iguales, se ha de admitir que las vibraciones son asimétricas respecto a su punto de reposo: la fuerza de retroceso es menor mientras se alejan las partículas que mientras se aproximan.

Admítase que la energía potencial entre ambas partículas recorra la curva de la figura como una bola pesada correría por un riel fijo en plano vertical, dependiente aquél de la separación de los átomos en cuestión.

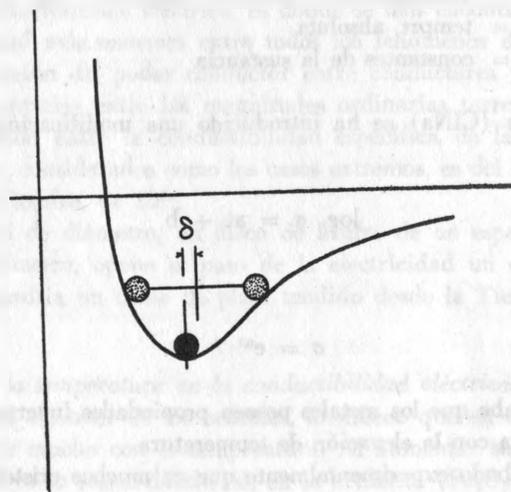


Figura 83. Esquema explicativo de la dilatación térmica δ .

La energía potencial de la bola representa la existente entre ambos átomos. La componente horizontal del movimiento de la bola representa el movimiento vibratorio de la partícula. Si no hay aporte de temperatura, la energía cinética es nula, la bola descansaría en el punto más profundo A, mínimo de energía potencial.

Al comunicar energía cinética a la bola, ésta rodará hacia arriba, aunque por ambas ramas de la curva alcanzará siempre la misma altura. De ser simétrica la curva, esto es, de ser el enlace quasi-elástico, los dos puntos de máximo alcance de la bola estarían igualmente alejados del de reposo. La posición me-

dia de la bola seguiría siendo A. Por lo contrario, la subida de la curva (riel) es menos pendiente cuanto mayor sea r y la elongación será mayor hacia este lado $BA' < A'C$; con lo que la posición media de la bola ya no es A sino D.

Por lo dicho, con aumento de temperatura, las posiciones medias de dos partículas vibrantes tienden siempre a alejarse: así se explica la dilatación de un cristal al calentarlo.

Medio isótropo: Al variar la temperatura de un medio isótropo en ΔT , se deforma linealmente,

$$e = \alpha \Delta T + \frac{\beta}{2} \Delta T^2 + \dots \quad (1)$$

preponderando el término de primer grado: α es su coeficiente lineal de dilatación térmica (un escalar),

$$\alpha = \frac{1}{l_0} \left(\frac{dl}{dT} \right)$$

Integrando se llega a,

$$l = l_0 (1 + \alpha T)$$

Medio anisótropo: La relación (1) para un medio cristalino puede escribirse,

$$[e] = [\alpha] \cdot \Delta T$$

en donde ΔT sigue siendo un escalar y $[e]$, $[\alpha]$ son tensores de 2o. orden:

$$[e] = \begin{bmatrix} 1 + e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & 1 + e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & 1 + e_{33} \end{bmatrix}; \quad [\alpha] = \begin{bmatrix} 1 + \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & 1 + \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 + \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

Puédese buscar el coeficiente de dilatación lineal de un cristal según una dirección cualquiera. El vector $\vec{j} \equiv [uvw]$ normal a una placa cristalina que se dilata pasa a ocupar la posición \vec{j}'

$$\vec{j}' = [\alpha] \vec{j}$$

y el espesor de la placa luego del incremento de su temperatura en 1° ,

$$\vec{j}'' = \vec{j} [\alpha] \vec{j}$$

Así, la dilatación lineal según $[uvw]$ es:

$$[\alpha] = [uvw] [\alpha] \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

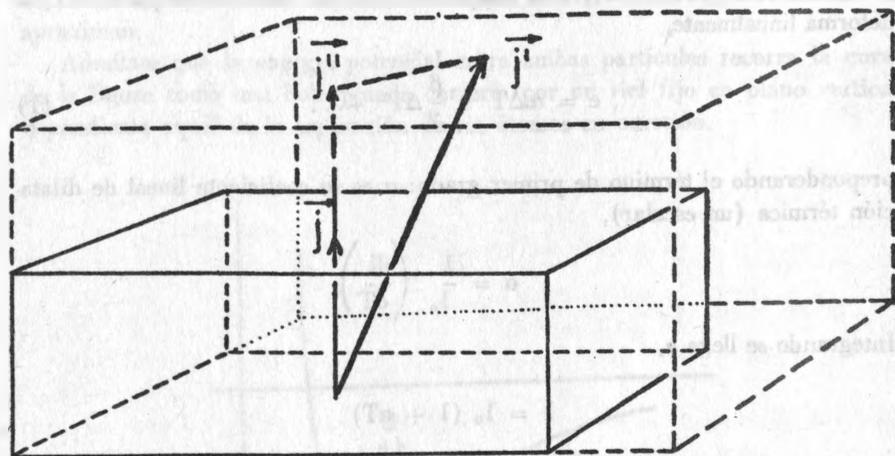


Figura 84.

Como $|\alpha|_{uvw} = |\alpha|_{\bar{u}\bar{v}\bar{w}}$ es equivalente en direcciones opuestas, el tensor de dilatación térmica es simétrico. La simetría cristalina obra sobre $[\alpha]$, de la misma forma que sobre los tensores que se estudian en la p. 113 (al tratar de la conductibilidad en los cristales), y en particular, la superficie de dilatación térmica definida por,

$$x y z [\alpha] x y z = 1$$

se rige por las mismas leyes que las del elipsoide de índices.

Mediciones prácticas: Los valores de α son del orden de 10^{-6} cm. gr⁻¹. Se aprecian por métodos interferométricos debidos a Fizeau: se coloca una placa de vidrio semiplatedada sobre tres barritas de platino de las que se sabe su coeficiente de dilatación. Se introduce un cristal de caras paralelas, con la superficie superior plateada. Se observará con luz monocromática el desplazamiento de las franjas de interferencia, en función de la temperatura.

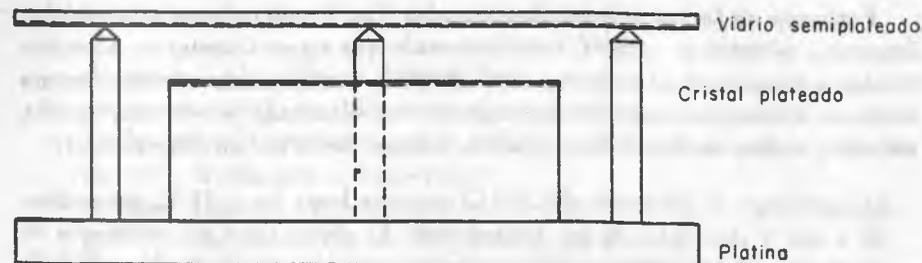


Figura 85. Método interferométrico de Fizeau.

TABLA XIV. COEFICIENTES DE DILATACIÓN TÉRMICA

α en 10^{-6} cm/gr. a 40°C

	α_{11}		α_{11}	α_{22}	α_{33}
Diamante	1.18	Cuarzo	14.2		7.81
As ₄ O ₈	41.2	Calcita	- 5.40		26.2
Fe ₃ O ₄	8.46	MgCO ₃	+ 5.99		21.3
Cu ₂ O	0.93	AgI	+ 0.65		- 3.97
PbS	6.70	Aragonito	34.0	17.20	10.1
CaF ₂		Topacio	5.9	4.8	
NaCl	40.4	Yeso	1.6	42.0	29.

Si se barnizan las caras del cristal y se observa una de ellas por reflexión con luz polarizada, la fotoelasticidad del barniz lo vuelve birrefringente: por la dilatación del cristal aparecen unas franjas debidas a la intersección de la cara con el elipsoide $[\alpha]$ que permiten medir su elipticidad.

Dilatación volumétrica. En esta dilatación $|\alpha|$ representa la relación entre los volúmenes deformado y primitivo,

$$|\alpha| = (1 + \alpha_{11}) (1 + \alpha_{22}) (1 + \alpha_{33}) + \dots + \dots$$

pudiendo prescindir de sus coeficientes de 2o. grado,

$$|\alpha| = 1 + \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$$

resulta,

$$V = V_0 [1 + (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) t]$$

Variación de los coeficientes de dilatación. Las investigaciones sobre calcita, aragonito, esfalerita a -250°C han demostrado que los coeficientes de dilatación tienden a desaparecer al acercarse al 0° absoluto. Cuando se eleva la temperatura ambiente crecen esos coeficientes, como se ha observado en el zinc, berilio, mercurio, óxidos de zinc y otros muchos, aunque no es eso un caso general:

El coeficiente de dilatación del NH_4Cl aumenta hasta los -31°C , descendiendo a uno y otro lados de esa temperatura. El níquel tiene un coeficiente de dilatación de $14 (10^{-6})$ a 0°C , creciendo rápidamente hasta 26 a 370°C , para volver a 15 a los 390° y elevarse a 18 a 600°C : todo ello sin cambio apreciable en su estructura cristalina.

Un cambio de temperatura, como la del α -cuarzo al pasar a β -cuarzo a 573°C suele corresponder a un cambio brusco de sus coeficientes de dilatación.

Los mayores coeficientes de dilatación de los cristales suelen hallarse entre los halogenuros alcalinos.

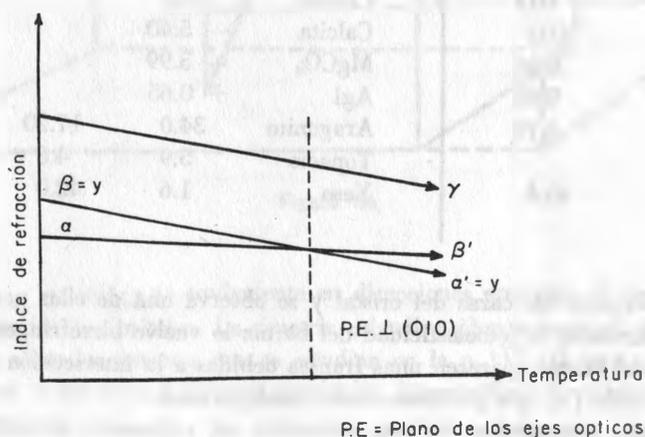


Figura 86. Comportamiento de los cristales de yeso al ser calentados.

D. Influencia de la temperatura en las propiedades ópticas

Estudiemos ahora la influencia de ese cambio de forma en las propiedades ópticas.

— El aumento de temperatura está ligada a una disminución del índice de refracción en los *cristales cúbicos*. Ej.: sal común $n = 1.54483 - 0.0000373 t$

$t =$ temperatura
Luz del Na

fluorita $n = 1.43416 - 0.0000124 t$

por lo contrario, en el diamante aumenta n con la temperatura.

- En los *cristales uniáxicos* ambos índices de refracción quedan influidos de modo diverso por la temperatura.
- *Cristales biáxicos*: Al calentarlos se alteran la refracción y la birrefringencia, el ángulo de los ejes y el plano de los mismos.

En el yeso, y a la temperatura ambiente, coincide el plano de los ejes ópticos con el de simetría (010) del cristal. Si se observa el campo de sus ejes en una placa perpendicular a la bisectriz aguda mientras se calienta progresivamente, se aprecia una disminución de abertura. A $91^{\circ}9'$ el ángulo aparente (2E) es nulo, para volverse a abrir, pero en plano perpendicular al anterior.

Esto se explica porque el índice de refracción β disminuye más rápidamente que α y β , cambiando su papel con α a 91.9° .

Temp	0	22°	32°	42°	62°	91°9'	100°	120°
2E	108°50'	92°54'	85°13'	77°21'	59°35'	0°	32°25'	57°13'

Parecida relación tiene la ortosa. El plano de los ejes a temperatura ordinaria es perpendicular a 010 (ópticamente negativa). Al calentarla, el ángulo se cierra hasta 0° y luego se abre en el plano perpendicular.

La brookita:

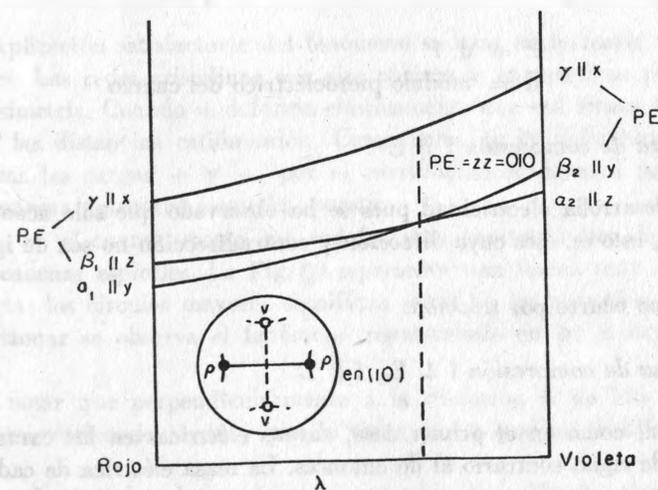


Figura 87. Cruzamiento de los planos axiales en la brookita.

PIEZOELECTRICIDAD

La primera indicación acerca de la piezoelectricidad fue hecha por Haiüy en cristales de calcita; no obstante, hasta 1880 quedó bien conocido este fenómeno por los estudios de Curie al comprimir una lámina de turmalina paralelamente al eje ternario y notar que las caras perpendiculares a ese eje se cargaban de electricidad de signo contrario. Dejando de comprimirlas se producía un cambio de signo. También se puede experimentar en un cristal de blenda al comprimirlo por las caras del octaedro mediante dos placas: una vinculada con la armadura y la otra con el cuerpo del electrómetro.

El fenómeno piezoeléctrico se ha estudiado con todo detalle en los cristales de cuarzo. Al tallar uno de ellos en forma de ortoedro de modo que una serie de sus aristas sea paralela al eje óptico E, otra serie lo sea a uno de los ejes binarios E₂ llamado en este caso *eje eléctrico*, las aristas de la tercera serie serán normales al plano de los dos ejes anteriores. Sometiendo el ortoedro a compresión o tracción, según dichas direcciones, se observa:

1. Fuerza de compresión $f \parallel E_2$

Aparece electricidad + P, - P en las caras normales al eje eléctrico E₂. La masa eléctrica q no depende del tamaño de la placa de cuarzo. Es,

$$P = d \cdot f$$

d = módulo piezoeléctrico del cuarzo

2. Fuerza de compresión $f \parallel E$

No se desarrolla electricidad pues se ha observado que sólo acontece según ejes polares, esto es, ejes cuya dirección y contradirección no sea de igual valor, P = 0.

Lo mismo ocurre por tracción.

3. Fuerza de compresión $f \perp E_2, f \parallel E$

Aparecen, como en el primer caso, cargas eléctricas en las caras normales a E₂, pero de signo contrario al de entonces. La masa eléctrica de cada cara es,

$$P_N = d \cdot \frac{n}{b} \cdot f$$

d = constante piezoeléctrica del cuarzo

f = fuerza compresión o tracción

b = dimensión del ortoedro según E₁

n = dimensión del ortoedro según N de acción de la fuerza

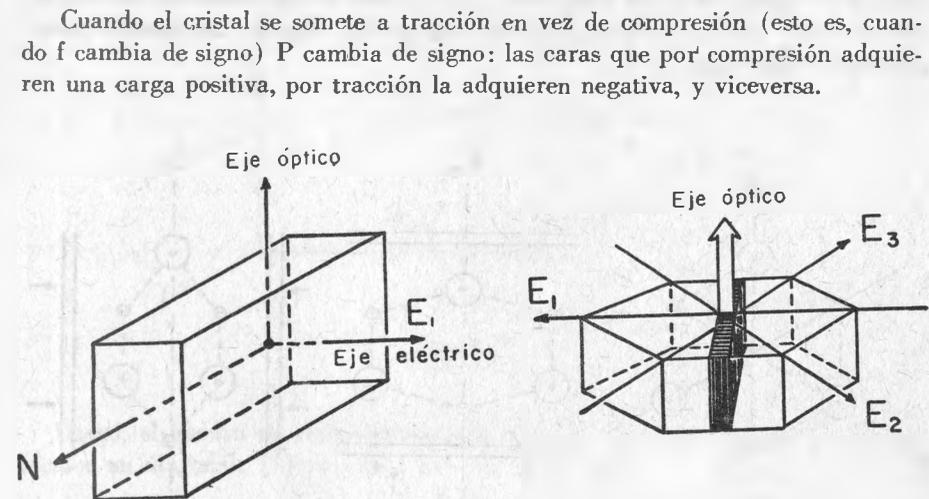


Figura 88.

Una explicación satisfactoria del fenómeno se basa en la teoría reticular de los cristales. Las redes cristalinas con ejes polares se caracterizan por no tener centro de simetría. Cuando se deforma elásticamente una red iónica de esa clase, se alteran las distancias catión-anión. Como antes de la deformación estaban compensadas las cargas + y -, por el corrimiento se cargará positivamente una cara externa y negativamente la opuesta.

Por ej., en el cuarzo, existe una red formada por tetraedros de SiO₄ ordenados en cadenas espirales. La Fig. 89 representa una forma muy simplificada de la misma: los círculos mayores significan iones Si, los pequeños O.

Al presionar se observa el fenómeno representado en b; al expansionarse, el de c.

Es de notar que perpendicularmente a la dirección E no hay ningún corrimiento asimétrico de iones, y por lo tanto, no se pueden manifestar cargas eléctricas.

El piezoeffecto se ha observado a más en turmalina, blenda, clorato Na, ac. acético, sacarosa, sal de Seignette...

Este fenómeno es reversible, esto es, si se coloca una plaquita de un cristal piezoeléctrico tallada perpendicularmente al eje eléctrico (polar), (p. ej., el cuarzo de la fig. en un campo eléctrico alterno de modo que la dirección de dicho campo sea paralela al eje E, dicha plaquita se comprimirá o dilatará en dirección del eje eléctrico.

Las aplicaciones de los piezocristales en la técnica, son muy numerosas e importantes: constancia de la frecuencia de vibración en las emisoras, oscilógrafo piezoeléctrico para patentizar tensiones de cambio rápido, micrófonos piezoeléctricos, ultraondas,...

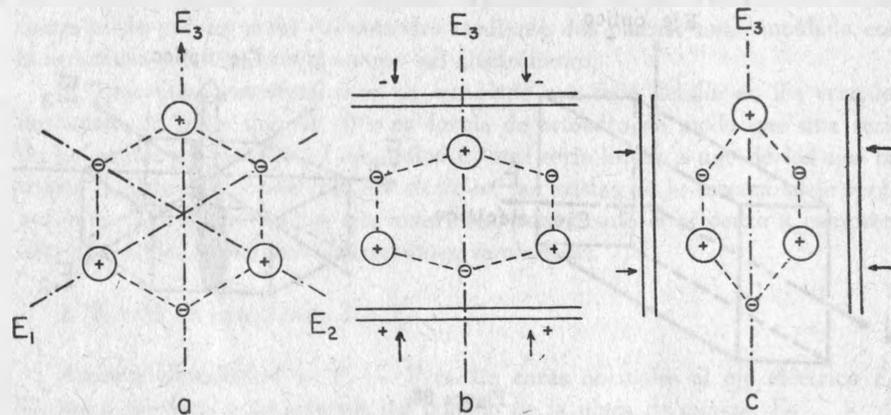


Figura 89.

Naturaleza analítica de la tensión. Sea un cubo unidad colocado en el seno de un medio y referido a tres ejes 1, 2, 3, paralelos a sus aristas. Una fuerza F aplicada sobre las tres caras del cubo se descompone en las f_{11} , f_{22} , f_{33} respectivamente perpendiculares a sus tres caras y de componentes laterales,

$$f_{31} \ f_{21} \ f_{12} \ f_{32} \ f_{13} \ f_{23}$$

(el segundo índice indica la cara en la que se sitúa la componente y el primero, su dirección de ésta).

Si el cubo estuviese en equilibrio estático, no habría de tener ningún par de rotación. Así, en el eje 1, para que no haya par será preciso que,

$$f_{23} = f_{32}; \text{ en el eje 2, que } f_{13} = f_{31}; \text{ en el eje 3, que } f_{12} = f_{21}$$

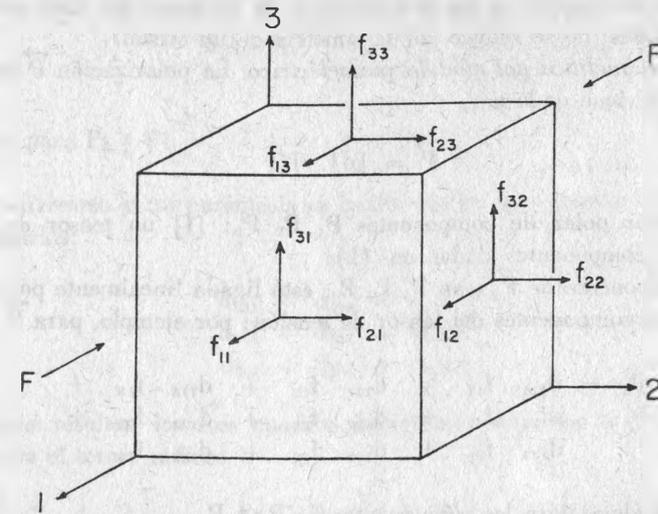


Figura 90.

Luego, el cuadro de componentes que describe la tensión es simétrico respecto a su diagonal: $[f] = [f]$.

$$[f] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{bmatrix} \quad (1)$$

La tensión f es un vector de orden 2 simétrico y vincula dos vectores según,

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = [f] \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

en donde $P_1 \ P_2 \ P_3$ son las componentes de \vec{p} , presión por unidad de superficie, cuya normal se define por el vector unidad de componentes $u \ v \ w$.

También puede representarse geoméricamente el tensor [f] mediante una cuádrlica de tensiones:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} [f] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 1$$

El tensor de tensión no es característico de la sustancia, sino sólo de las fuerzas aplicadas: no se reduce por la simetría de un cristal.

Naturaleza analítica del módulo piezoeléctrico. La polarización \vec{P} creada por la tensión $[f]$ viene dada por,

$$\vec{P} = [d] [f]$$

\vec{P} es un vector polar de componentes $P_1 P_2 P_3$; $[f]$ un tensor de orden 2 simétrico de componentes dadas en (1).

Cada componente de \vec{P} , sean $P_1 P_2 P_3$, está ligada linealmente por experiencia a todas las componentes del tensor de tensión: por ejemplo, para \vec{P}_1

$$P_1 = d_{111} f_{11} + d_{112} f_{12} + d_{113} f_{13} + d_{121} f_{21} + d_{122} f_{22} + d_{123} f_{23} + d_{131} f_{31} + d_{132} f_{32} + d_{133} f_{33}$$

y de modo análogo para las componentes de P_2 y P_3 .

Las cantidades d_{ijk} ($i, j, k = 1, 2, 3$) son constantes módulos piezoeléctricos y se representan por los tres cuadros,

$$\begin{bmatrix} d_{111} & d_{112} & d_{113} \\ d_{121} & d_{122} & d_{123} \\ d_{131} & d_{132} & d_{133} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} d_{211} & d_{212} & d_{213} \\ d_{221} & d_{222} & d_{223} \\ d_{231} & d_{232} & d_{233} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} d_{311} & d_{312} & d_{313} \\ d_{321} & d_{322} & d_{323} \\ d_{331} & d_{332} & d_{333} \end{bmatrix}$$

Los 27 coeficientes pueden representarse en forma de matriz cúbica d_{ijk} :

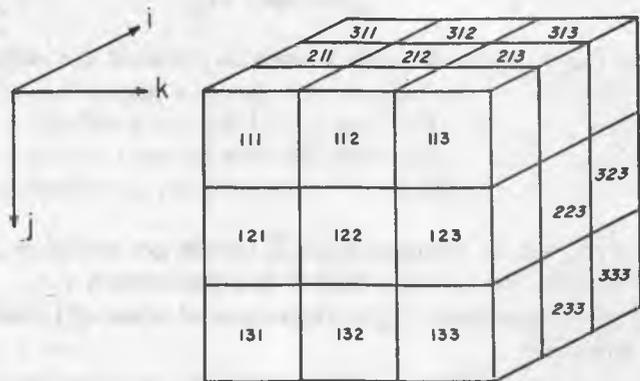


Figura 91.

y el tensor d_{ijk} se reduce notando que $[f] = [\tilde{f}]$. Así que, p. ej.,

$$P_1 = d_{111} f_{11} + (d_{112} + d_{121}) f_{12} + (d_{113} + d_{131}) f_{13} + d_{122} f_{11} + (d_{133} + d_{132}) f_{23} + d_{133} f_{33}$$

y lo mismo para P_2 y P_3 .

Los coeficientes entre paréntesis se confunden en uno porque no hay medio de distinguirlos:

$$\begin{aligned} d_{123} + d_{132} &= d_{14}/2 \\ d_{113} + d_{131} &= d_{15}/2 \\ d_{112} + d_{121} &= d_{16}/2 \end{aligned}$$

Con ello resultan los tres cuadros simétricos reducidos a 18 coeficientes, suprimiendo el tercer índice:

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{16}/2 & d_{15}/2 \\ & d_{12} & d_{14}/2 \\ & & d_{13} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} d_{21} & d_{26}/2 & d_{25}/2 \\ & d_{22} & d_{24}/2 \\ & & d_{23} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} d_{31} & d_{36}/2 & d_{35}/2 \\ & d_{32} & d_{34}/2 \\ & & d_{33} \end{bmatrix}$$

Escribiendo el tensor simétrico de 2o. orden $[f]$, en notación simplificada,

$$[f] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} f_1 & f_6 & f_5 \\ f_6 & f_2 & f_4 \\ f_5 & f_4 & f_3 \end{bmatrix}$$

y luego en forma de vectores columna de 6 componentes, se restituye la relación $P = [d] [f]$ si se escribe,

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix}$$

que se multiplica como de costumbre, línea por columna.

Efecto de la simetría sobre [d]. Por transformaciones complicadas, se llega a la conclusión:

1. Los cristales centrosimétricos no presentan piezoelectricidad.

2. La clase 432 no es piezoeléctrica; las otras sí lo son, con sus módulos indicados en el cuadro:

TABLA XV. MÓDULOS PIEZOELÉCTRICOS DE LAS CLASES NO CENTROSIMÉTRICAS

Notaciones: o módulo nulo
 x módulo diferente de cero
 x-x módulos iguales
 x-+ módulos iguales y de signo contrario
 x-% módulo x (o +) igual a - 2 veces el módulo %

Clases	Módulos	Clases	Módulos
1	x x x x x x	2	o o o x o x
	x x x x x x	2 según x ₂	x x x o x o
	x x x x x x		o o o x o x
m	x x x o x o	222	o o o x o o
m de ejes	o o o x o x		o o o o x o
x ₁ x ₃	x x x o x o		o o o o o x
mm	o o o o x o	4	o o o x x o
2 según x ₃	o o o x o o		o o o x + o
	x x x o o o		x x x o o o
$\bar{4}$	o o o x x o	422	o o o x o o
	o o o + x o		o o o o + o
	x-+ o o o x		o o o o o o
4mm	o o o o x o	$\bar{4}2$	o o o x o o
6mm	o o o x o o		o o o o x o
	x-x x o o o		o o o o o x
432	o o o o o o	$\bar{4}3$	o o o x o o
	o o o o o o	23	o o o o x o
	o o o o o o		o o o o o x
3	x-+ o x x %	32	x-+ o x o o
	+ - x o x + %		o o o o + %
	x x x o o o		o o o o o o
3m	o o o o x %	6	o o o x x o
m perp. x ₁	+ - x o x o o		o o o x + o
	x-x x o o o		x x x o o o

ANEXOS

ANEXO I

EL CONCEPTO DE CRISTAL

Después de prestar oídos a una definición de cristal, nos imaginamos tratarse de un concepto científicamente abstracto, y sin embargo pocas cosas se adaptan a nuestra vida como los cristales.

La llamada sal de cocina o de mesa, es un pedruzco de NaCl que no suele escasear molida en cocinas y triturada en comedores. Se reconocen las caras de los pequeños cristales fragmentados, que de ser enteros se apreciarían en forma de cubos.

Esta sal es necesaria como alimento, dando sabor de sazón a los manjares. No es posible prescindir de ella y aún se ha de aumentar su dosis en casos de grandes pérdidas orgánicas. Por el sudor se eliminan cantidades considerables de NaCl; los fogoneros experimentan un placer especial de descanso al apagar su sed bebiendo agua salada, ya que esas personas suelen eliminar grandes cantidades de sal. El medio interno humano es una solución de cloruro de sodio, que se ha de reponer clínicamente en las deshidrataciones.

La sal de mesa pura no se hidrata en los saleros ni los obstruye; no así la impurificada que se obtiene directamente por la evaporación del agua de mar en las salinas.

El polvo de azúcar está constituido por multitud de pequeños cristales monoclinicos. Los disolvemos en grandes cantidades al agitarlos con una cucharita en una taza de café caliente. Esos cristales de sacarosa son de una sustancia natural de las más dulces, y compuestos de la combinación de dos azúcares sencillos, la glucosa y la fructosa, de los cuatro únicamente asimilables por nuestro organismo: la digestión de todo hidrato de carbono de nuestra alimentación lleva a la transformación de ese alimento a uno de esos cuatro azúcares, como condición indispensable.

Hay muchos cristales que son de formación en los organismos vivos:

El caparazón de los moluscos se construye por capas sucesivas de cristales de carbonato de calcio y de una sustancia orgánica llamada conquiolina. Los prismas de carbonato se depositan paralelos entre sí y en perfecto orden: resultan así las conchas de tan variados colores y formas, aunque admirablemente uniformes en cada individuo.

Formación parecida a la de las conchas es la de las perlas, en ciertas especies marinas. Al introducirse en esos animales un parásito procuran defenderse de él englobándolo en capas de carbonato de calcio, que alternando con otras de conquiolina dan a la cápsula protectora forma esférica de un brillo "perlado" característico. Los pescadores de perlas han querido provocar en los moluscos una formación semejante cuando introducen en el manto de la madreperla un granito de arena. Los animales se defienden del estorbo desacostumbrado, aunque con perlas que no tienen la misma arquitectura que las legítimas: estas perlas en cierto modo artificiales, son las llamadas cultivadas, de valor muy inferior en el mercado.

En nuestro organismo hay formaciones cristalinas muy importantes, como son las de los huesos, también de carbonato de calcio; nuestros dientes que al núcleo óseo de análoga formación rodean por un depósito de cristales de fluorapatito para adquirir gran dureza, resistencia y brillo.

Desgraciadamente pueden haber en nosotros ciertos depósitos anormales que originan achaques muy dolorosos: los cálculos biliares o hepáticos, las arenillas vesicales, . . . son formaciones cristalinas. Las calcificaciones anormales de ciertos órganos acentúan los achaques de la vejez.

Innumerables son en la industria las aplicaciones de los cristales:

Piénsese que la estabilización de las vibraciones radiofónicas se debe a intercalar en su circuito emisor un cristal de cuarzo piezoeléctrico, y al pasar por él la corriente, vibra debido al efecto contrario. Estas vibraciones admirablemente constantes, se transforman en ondas cuya longitud se regula por los aparatos emisores.

Las aleaciones metálicas son acumulaciones de cristales que dan origen a multitud de aplicaciones sumamente necesarias a nuestra economía de vida actual. El cobre tiene aleaciones con estaño y con cinc, para formar los latones y los bronce. El hierro, con cantidades variables de carbono da el hierro dulce, el acero que es capaz de templarse por un cambio característico provocado en su cristalización, el hierro colado para moldear cantidad de objetos útiles. Si al hierro se le añaden ciertos metales en su fundición, se logran aceros de características muy especiales: rieles de ferrocarril, herramientas, ruedas de trenes, etc.

Cuando se someten las aleaciones a esfuerzos constantes y superiores a los que pueden resistir, sobreviene la "fatiga" del metal, y su ruptura. Se comenzó a estudiar este fenómeno al romperse las alas de los aviones cuando se inició la carrera por su aumento de velocidad.

Son de citar aquí las aleaciones de metales preciosos, y aun de otros comunes, para la troquelación de monedas.

ANEXO 2

EL CRISTAL ES UNA FORMA ESTABLE DE LAS SUSTANCIAS

Un cristal es el estado puro y permanente de la sustancia o mezcla de ellas que lo constituyen. Cuando se le disuelve, puede experimentar alteraciones; no así mientras permanece la forma de cristal. Por ello se pueden conservar las medicinas sin alteración mientras se mantengan en su forma cristalina primitiva: la penicilina dura poco tiempo si se la disuelve. Las sales fotográficas "envejecen" cuando se las disuelve.

ANEXO 3

LOS TÉRMINOS DE ISOTROPÍA Y ANISOTROPÍA

Son las respuestas del medio cristalino relativos a la acción de un agente físico sobre él. Un cristal puede responder isotrópicamente a cierta acción física (el calor, la cohesión) y anisotrópicamente ante otra acción física diferente (la luz).

Etimológicamente: gr., igual, desigual, cambio.

ANEXO 4

LA SIMETRÍA

La simetría de disposición de la materia cristalina es una propiedad maravillosa, registrada ya desde principios de la cristalografía con un rasgo genial que permitió el ulterior desarrollo alcanzado y la pronta racionalización adquirida por esa ciencia de los cristales.

ANEXO 5

SISTEMAS Y SINGONÍAS CRISTALINAS

Los sistemas y las singonías cristalinas son categorías sistemáticas que agrupan conjuntos de cristales con ciertas peculiaridades geométricas comunes. Son homólogas a las de *tipos* y *órdenes* ideados en las sistemáticas biológicas, aunque con extensiones muy diferentes.

En un *sistema* se agrupan clases cristalinas o grupos de cristales que presentan un mismo arreglo de eje principal. Hay cinco sistemas en cristalografía, por ser los ejes 2, 3, 4 y 6 los únicos ejes cristalográficamente posibles:

- 1o. Sistema teseral (o cúbico) cuyo eje principal se acompaña siempre por el ternario.
- 2o. Sistema tetragonal, con su eje principal cuaternario (sin "simbiosis" con ternario alguno).
- 3o. Sistema hexagonal, con eje principal senario.
- 4o. Sistema trigonal, con eje principal ternario. La dificultad en distinguir la realidad de estos dos ejes, ya que el de orden 6 comprende al de orden 3, originó hace tiempo cierta confusión, que ahora ha sido disipada al estudiar con rayos X la estructura íntima de la materia.
- 5o. Sistema digonal, con su eje principal binario. Este sistema es el "tolerante" entre todos los demás por admitir grupos de cristales aunque carezcan de tal eje.

La singonía hace referencia, en cambio, a los aspectos angulares que pueden ofrecer los ejes cristalográficos. En los cuatro primeros sistemas es invariable su sistema de referencia, y por lo tanto, los términos sistema y singonía son sinónimos. No así en el sistema digonal, que ofrece tres modalidades de inclinación de los ejes cristalográficos:

- la singonía ortoclínica tiene sus ejes de referencia ortogonales.
- la singonía monoclínica presenta un eje no perpendicular al plano de los otros dos, que siguen con sus ángulos rectos.
- la singonía triclínica tiene sus tres ejes mutuamente inclinados.

Estos conceptos se aclaran en el cuadro adjunto:

TABLA XVI. SIMBOLOS DE LAS 32 CLASES DE SIMETRÍA

No.	Schönfl.	Hermann-Mauguin		Pardillo
		completo	abreviado	
CÚBICO				
1. Holoedría	O_h	$4/m\bar{3}2/m$	$m\bar{3}m$	C_1
2. Hem. enantiomórfica	O	432	43	C_2
3. „ hemimórfica	T_d	$\bar{4}3m$	$\bar{4}3m$	C_3
4. „ paramórfica	T_h	$2/m\bar{3}$	$m\bar{3}$	C_4
5. Tetartoedría	T	23	23	C_5
TETRAGONAL				
6. Holoedría	D_{4h}	$4/m2/m2/m$	$4/mmm$	Q_1
7. Hem. enantiomórfica	D_4	422	42	Q_2
8. „ hemimórfica	C_{4v}	4mm	4mm	Q_3
9. „ paramórfica	C_{4h}	4/m	4/m	Q_4
10. Tetartoedría	C_4	4	4	Q_5
11. Hem. alternante	$D_{2d} (V_d)$	$\bar{4}2m$	$\bar{4}2m$	Q_6
12. Tet. alternante	S_4	4	4	Q_7
EXAGONAL				
13. Holoedría	D_{6h}	$6/m2/m2/m$	$6/mmm$	H_1
14. Hem. enantiomórfica	D_6	622	62	H_2
15. „ hemimórfica	C_{6v}	6mm	6mm	H_3
16. „ paramórfica	C_{6h}	6/m	6/m	H_4
17. Tetartoedría	C_6	6	6	H_5
18. Hemiedr. alternante	D_{3h}	$\bar{6}2m$	$\bar{6}2m$	H_6
19. Tetart. alternante	C_{3h}	$\bar{6}3/m$	$\bar{6}$	H_7
TRIGONAL				
20. Holoedría	D_{3d}	$\bar{3}2/m$	$\bar{3}m$	T_1
21. Hem. enantiomórfica	D_3	32	32	T_2
22. „ hemimórfica	C_{3v}	3m	3m	T_3
23. „ paramórfica	C_{36}	$\bar{3}$	$\bar{3}$	T_4
24. Tetartoedría	C_3	3	3	T_5

RÓMBICO

25. Holoedría	$D_{2h} (V_h)$	$2/m2/m2/m$	mmm	R_1
26. Hem. enantiomórfica	$D_2 (V)$	222	222	R_2
27. „ hemimórfica	C_{2v}	$2mm$	mm	R_3

MONOCLÍNICO

28. Holoedría	C_{2h}	$2/m$	$2/m$	M_1
29. Hem. enantiomórfica	C_2	2	2	M_2
30. „ hemimórfica	$C_s = S_8 (C_h)$	$m = \bar{2}$	m	M_3

TRICLÍNICO

31. Holoedría	$C_1 (S_2)$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	A_1
32. Hemiedría	C_1	1	1	A_2

TABLA XVII. LAS CLASES DE SIMETRÍA

No. Operaciones de simetría Nomenclaturas

SISTEMA CÚBICO

Schönfliess

Groth

1. $3E^4 4E^3 6E^2 c 3P 6P'$	Holoedría	Exaquisoctaédrica
2. $3E^4 4E^3 6E^2$	Hem. enantiomórfica	Pentagoicositetaédrica
3. $3E^2 4E^3$	„ hemimórfica	Exaquistetraédrica
4. $3E^2 4E^3 c 3P$	„ paramórfica	Disdodecaédrica
5. $3E^2 4E^3$	Tetartoedría	Pentagododecaédrica

SISTEMA TETRAGONAL

6. $E^4 4E^2 c P 4P'$	Holoedría	Ditetragonal bipiramidal
7. $E^4 4E^2$	Hem. enantiomórfica	Tetrag. trapezoédrica
8. E^4	„ hemimórfica	Ditetrag. piramidal
9. $E^4 c P$	„ paramórfica	Tetragonal bipiramidal
10. E^4	Tetartoedría	Tetragonal piramidal
11. $\bar{E}^2 2E^2$	Hem. alternante	Tetrag. escalenoédrica
12. \bar{E}^2	Tet. alternante	Tetragonal biesfenoidal

SISTEMA EXAGONAL

13. $E^6 6E^2 c P 6P'$	Holoedría	Diexagonal bipiramidal
14. $E^6 6E^2$	Hem. enantiomórfica	exag. trapezoédrica
15. E^6	„ hemimórfica	Diexagonal piramidal
16. $E^6 c P$	„ paramórfica	exagonal bipiramidal
17. E^6	Tetartoedría	exagonal piramidal
18. $\bar{E}^3 3E^2 P 3P'$	Hem. alternante	Ditrigonal bipiramidal
19. $\bar{E}^3 P$	Tet. alternante	Trigonal bipiramidal

SISTEMA TRIGONAL

20. $E^3 3E^2 c 3P'$	Holoedría	Ditrigonal escalenoédrica
21. $E^3 3E^2$	Hem. enantiomórfica	Trigonal trapezoédrica
22. E^3	„ hemimórfica	Ditrigonal piramidal
23. $E^3 c$	„ paramórfica	Romboédrica
24. E^3	Tetartoedría	Trigonal piramidal

SISTEMA DIGONAL: Singonía ORTOCLÍNICA

25. $3E^2 c 3P'$	Holoedría	Rómbica bipiramidal
26. $3\bar{E}^2$	Hem. enantiomórfica	Rómbica biesfenoidal
27. \bar{E}^2	„ hemimórfica	Rómbica piramidal

--- Singonía MONOCLÍNICA

28. $E^2 c P$	Holoedría	Monoclínica prismática
29. E^2	Hem. enantiomórfica	Monoclínica esfenoidal
30. P	„ hemimórfica	Monoclínica domática

--- Singonía TRICLÍNICA

31. c	Holoedría	Triclínica pinacoidal
32.	Hemiedría (asimetría)	Triclínica pedial

ANEXO 6

NIEVE Y HIELO

El astrónomo Kepler fue el primero en prestar su atención científica a estas dos modalidades de agua sólida.

El agua solidifica en la atmósfera por enfriamiento. Su forma de cristalización son prismas hexagonales, que se agrupan de dos modos por las condiciones meteorológicas del momento.

Resulta *nieve* cuando la asociación de los prismas hexagonales es biáxica: que ofrecen dos de sus direcciones mutuamente paralelas. De ese modo se construyen unos agregados arborescentes, de aspecto general también hexagonal, que se precipitan en los llamados copos de nieve.

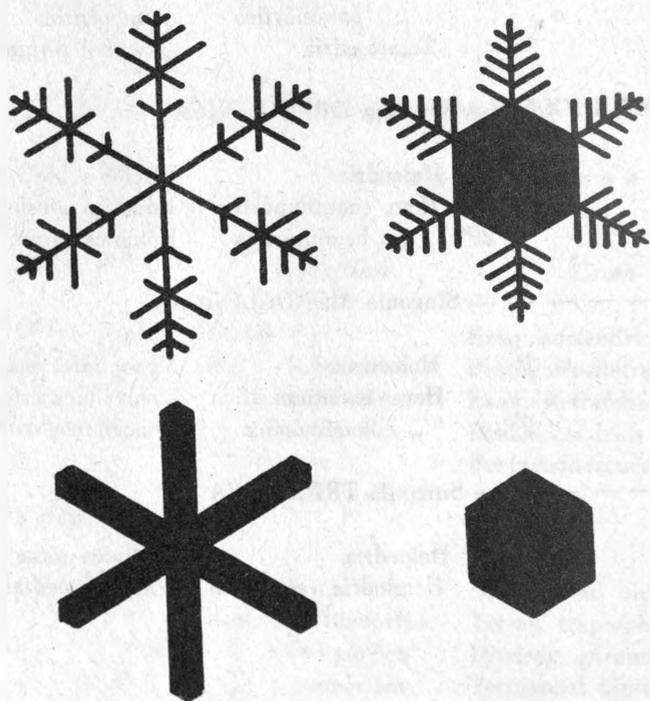


Figura 92. Copos de nieve (dendritas).

Resulta *hielo* en los casos de enfriamiento rápido de las gotas de lluvia ya formadas. La asociación de los prismas hexagonales de hielo es aquí uniáxica, es decir, se agrupan los cristales con una sola dirección paralela entre sí, quedando variables las otras dos. Los prismas de agua helada solidifican colocando su eje principal, llamado *c*, perpendicularmente a la superficie libre del agua: al helarse las gotas de forma esférica, se fuerzan los prismas a colocarse como radios de esas bolas de agua sólida.

ANEXO 7

CARAS Y ARISTAS

Caras

Las caras cristalinas se suelen determinar por tres índices que se colocan entre paréntesis redondos (*hkl*), cuyo conjunto forma el símbolo de la cara.

La ecuación simétrica de un plano es,

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1 \quad (*)$$

o bien,

$$\frac{1}{m} x + \frac{1}{n} y + \frac{1}{p} z = 1$$

en donde los coeficientes $\frac{1}{m} \frac{1}{n} \frac{1}{p}$ son los índices de Weiss del plano. La ley de Haüy interpreta los números *m*, *n*, *p*, como números racionales y sencillos.

Si se multiplica la ecuación (*) por *m.n.p*, se tiene,

$$(np)x + (mp)y + (mn)z = (mnp)$$

$$h x + k y + l z = P$$

con todos los coeficientes enteros. Los factores *h*, *k*, *l*, se llaman índices de Miller del plano, más convenientes que los de Weiss, ya que son siempre finitos para cualquier cara, aun paralela a uno de los ejes.

El vector cuyos componentes sean (h, k, l) será normal al plano correspondiente.

En el sistema hexagonal se acostumbra emplear innecesariamente cuatro índices de Miller, con los tres primeros referidos a ejes horizontales abiertos 120° entre sí y el cuarto al eje vertical. Los tres primeros son ejes homogéneos y dependientes entre sí, puesto que su suma debe ser cero.

Por consiguiente, sentadas esas convenciones, no hay inconveniente en generalizar para todo sistema cristalino los símbolos de tres índices (hkl).

Aristas

Una arista es la recta común a dos caras de un cristal. Dadas las ecuaciones de las citadas caras (hkl) y h' k' l'),

$$\frac{h}{a}x + \frac{k}{b}y + \frac{l}{c}z = 0 ; \frac{h'}{a}x + \frac{k'}{b}y + \frac{l'}{c}z = 0$$

su intersección deberá satisfacer a ambas ecuaciones. Resolviéndolas resulta,

$$x : y : z = \begin{vmatrix} k & l \\ k' & l' \end{vmatrix} a : \begin{vmatrix} 1 & h \\ 1' & h' \end{vmatrix} b : \begin{vmatrix} h & k \\ h' & k' \end{vmatrix} c$$

$$x : y : z = u a : v b : w c$$

Los enteros [u v w] forman el símbolo de la arista, encerrado entre paréntesis cuadrados.

Para el empleo práctico de esas expresiones, la operación se dispone así:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} h & k & l & h & k & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ \times & & & & & & & & & & & \\ h' & k' & l' & h' & k' & 1' & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ \hline & & & & & u & v & w & & & & \\ \hline & & & & & & & & 2 & 5 & 4 & \end{array}$$

A ese símbolo de arista corresponden las coordenadas $\bar{2}a$, $5b$, $\bar{4}c$. (El otro punto que determina la arista es el origen.)

ANEXO 8

LOS 11 GRUPOS DE SIMETRÍA DE LAUE

Cuando se aplica alguna propiedad física que por su naturaleza es centrosimétrica, como la exfoliación, a cualquiera de las 32 clases de simetría, se añade el centro de simetría a su dotación peculiar de operadores. Esto quiere decir que no hay distinción entre las clases cristalinas centrosimétricas y las que carecen de centro, pudiendo agruparlas en los 11 Grupos de Simetría de Laue. Los grupos citados se hallan enmarcados en el mismo rectángulo, y la simetría del grupo de Laue queda señalada por la del colocado en su parte inferior.

TABLA XVIII. LOS 11 GRUPOS DE SIMETRÍA DE LAUE

Cúbico	Tetragonal	Tesagonal	Trigonal	Digonal
23 ----- m3	4 ----- 4/m	6 ----- 6/m	3 ----- 3	Ortoclínicas 222 m m 2 ----- m m m
432 ----- m3m	422 ----- 4mm ----- 42m ----- 4/mmm	622 ----- 6mm ----- 6m2 ----- 6/mmm	32 ----- 3m ----- 3m	Monoclínicas 2 ----- m ----- 2/m
				Triclínicas 1 ----- 1

Cada rectángulo se divide en dos: en su primera mitad se han colocado las clases sin centro de simetría, y en su parte inferior las que resultan al añadirles centro.

ANEXO 9

OPERADORES M DE LOS ELEMENTOS DE SIMETRÍA

TABLA XIX

1o. ROTACIÓN PROPIA (SIMPLE): EL EJE DE GIRO COINCIDE CON EL PRIMER EJE COORDENADO

Ángulo de giro α	Orden del eje n	Operador [M]	Significado
0°	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Identidad
$\pi = 180^\circ$	2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	Eje binario
$\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$	3	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$	Eje ternario
$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$	4	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	Eje cuaternario
$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	6	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	Eje senario

TABLA 20

2o. ROTACIÓN IMPROPIA (INVERSORA): ROTACIONES POR X SEGUIDAS DE REFLEXIÓN EN EL PLANO YZ: SE COMBINA $-1=i$ CON LOS OPERADORES ANTERIORES

Ángulo de giro α	Orden del eje n	Operador [M]	Significado
$\pi = 180^\circ$	$-1 = 1.i$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	Centro de inversión
0°	$-2 = 2.i$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Plano YZ de reflexión
$\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$	$-3 = 3.i$		
$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$	$-4 = 4.i$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	Eje cuaternario de reflexión (=inversión)
$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$-6 = 6.i$		

ANEXO 10

CONSTRUCCIÓN DE POINSOT

Una construcción geométrica debida a Poinso \bar{t} da la dirección del vector inducido \bar{D} sobre la indicatriz, conociendo la del \bar{E} .

\bar{D} es paralela a la normal del plano tangente a la indicatriz en P.

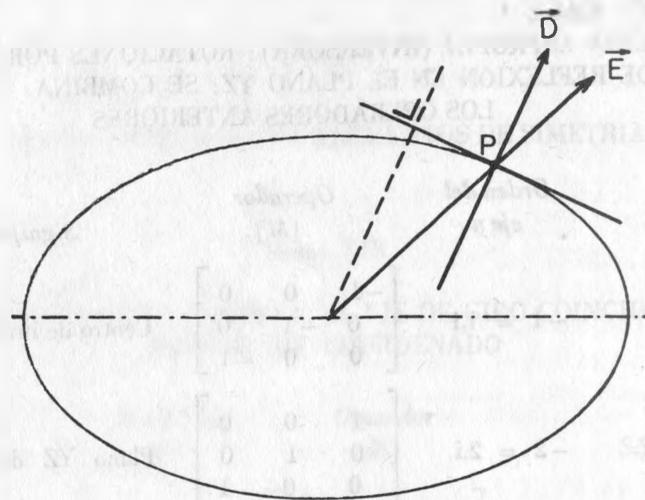


Figura 93. Construcción de Poincot.

ANEXO 11

LA CELDA ELEMENTAL

Es característico, aunque no necesario en los cristales, el aspecto geométrico que presentan. Esa forma geométrica es una manifestación de la ordenación periódica interna que poseen: el espacio comprendido se llama *espacio reticular*, y es esencial a todo cuerpo cristalino. La red cristalina está formada por las intersecciones de tres series de planos mutuamente paralelos, en cuyos puntos comunes o "nudos" de la red se colocan las partículas materiales (átomos, iones, moléculas).

Las tres traslaciones de esa red determinan una *celda elemental* o fundamental, cuyo tamaño es del orden de las dimensiones atómicas: la unidad de longitud que se emplea para medirlas es el Angstrom ($A = 10^{-8}$ cms.). La yuxtaposición de esas celdas elementales llena el espacio cristalino.

Ya en los primeros años de la cristalografía se sospechaba la existencia de la celda elemental; mas la confirmación de esa hipótesis llegó a la realidad con la aplicación de los rayos X, logrando poder medir sus dimensiones absolutas y hasta la determinación de sus puntos materiales o estructura de la sustancia. (En la Fig. 6, se representan 8 celdas elementales del NaCl.)

ANEXO 12

ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE MATRICES

Introducción

Las matrices son un medio de cálculo que simplifica notablemente la representación de las operaciones necesarias en cristalografía, hallando el modo de representar matemáticamente los fenómenos físicos y el comportamiento de los cristales.

A continuación se presentan unas nociones del Cálculo Matricial, que se consideran esenciales para la resolución de los problemas cristalográficos.

Definiciones

La principal aplicación del cálculo matricial reside en la relación lineal que existe entre un conjunto (x_1, x_2, x_3, \dots) y otro $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots)$:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ \gamma_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ \gamma_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ \gamma_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \end{aligned} \quad (1)$$

ecuaciones que pueden representarse

$$y = Ax \quad (2)$$

con el símbolo A que indica el arreglo de los coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = [a_{ik}] \quad (3)$$

La matriz puede tener m renglones o filas y n columnas, por lo que en total consta de m.n elementos, cuyo producto indicado se llama "orden de la matriz". Si $m = n$ la matriz se llama "cuadrada". Al elemento de la fila i y columna k, se le representa por el símbolo a_{ik} .

La matriz se puede representar abreviadamente por,

$$[a_{ij}], ||a_{ij}||, [a], \text{ o } \overset{n}{A}$$

y si es cuadrada,

$$[a_{ij}], ||a_{ij}|| [a];$$

y su determinante, por,

$$|a_{ij}|, |\underline{a}|$$

Los símbolos x e γ se representan por matrices columna o vectores:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; \quad y = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Sustituyendo las igualdades (3) y (4) en la (2),

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (5)$$

lo que permite observar la relación entre (5) y (1): el elemento γ_i es el producto escalar del renglón i de la matriz A por el vector j columna x .

Matriz cuadrada. Es la que tiene igual número de filas y de columnas, cual ya se ha indicado. La diagonal formada por los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$ se llama "diagonal principal".

La matriz cuadrada $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 8 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ tiene como diagonal principal

2 2 2.

Determinante de una matriz cuadrada, es el formado con todos sus elementos. Como un determinante es un arreglo de $n \times n$ elementos a_{ij} , sólo pueden tenerlo las matrices cuadradas.

La matriz $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 8 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ tiene por determinante $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 8 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 80$

Matriz renglón, es una matriz de orden $1 \times n$. Es decir, la expresión de un vector en una sola fila.

$$[8 \ 2 \ 4]$$

Matriz columna, es una matriz de orden $n \times 1$, o sea, en una sola columna.

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Matriz singular, es una matriz cuadrada cuyo determinante es nulo.

El determinante de $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

Rango de una matriz, es el orden del mayor determinante distinto de cero que puede formarse con ella quitando columnas y/o renglones. Una matriz es no singular cuando siendo cuadrada tiene su determinante distinto de cero.

El rango de una matriz no se altera:

- 1o. por intercambio de dos filas paralelas,
- 2o. por multiplicación de los elementos de una fila por un mismo número $k \neq 0$,
- 3o. por adición de los elementos de una fila, a los elementos correspondientes de otra paralela multiplicados por un mismo número.

Orden de singularidad. Si $[\underline{a}]$ es de orden n y de rango q , su orden de singularidad de $[\underline{a}]$ es: $s = n - q$.

Matriz triangular superior, si para $i > k$ se tiene $a_{ik} = 0$, o sea, que todos los elementos bajo la diagonal principal sean nulos.

Matriz estrictamente triangular, si para $i \geq k$, se tiene $a_{ik} = 0$, o sea que todos los elementos de la diagonal principal y todos los situados debajo de ella sean nulos.

Igualdad de dos matrices. Dos matrices son iguales cuando todos sus elementos mutuamente correspondientes son iguales.

Matriz nula o matriz cero, es aquella que tiene nulos todos sus elementos.

Suma y resta de matrices, sólo se efectúan con matrices de igual orden. El resultado es asimismo del orden de los sumandos, y se obtiene sumando (o restando) todos sus elementos correspondientes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 8 & 5 & 7 \\ 9 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Producto de una matriz por un escalar se efectúa multiplicando todos los elementos de la matriz por el escalar.

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 8 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Producto de dos matrices. Para multiplicar dos matrices $[a] \cdot [b]$ es necesario que el número de renglones de $[b]$ sea igual al número de columnas de $[a]$: Los elementos pq del producto $[c]$ se obtienen como productos internos de los elementos p de un renglón de $[a]$ por los de la columna correspondiente de $[b]$. Se llama producto interno de (m, n, l) . (i, j, k) a la suma $(mi + nj + lk)$.

Si la matriz $[a]$ es de orden (m, p) y la $[b]$ es de orden (p, n) , la matriz producto $[c]$ será del orden (m, n) . Una forma conveniente de disponer la operación es,

$$\begin{matrix} & [b] \\ [a] & [c] \end{matrix}$$

y para verificarla se puede aumentar un renglón a la primera matriz que viene de la suma de los elementos de cada columna. Se efectúa la multiplicación incluyendo el renglón extra: si la operación está bien hecha, los elementos del renglón extra en la matriz $[c]$ serán iguales a la suma de los demás elementos de su correspondiente columna.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 8 \\ \hline 3 & 11 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 & 17 & 13 & 13 \\ -14 & -8 & -2 & 8 \\ 58 & 67 & 28 & 32 \\ \hline 59 & 76 & 39 & 32 \end{bmatrix} \Sigma$$

El producto de dos matrices cumple con las leyes formales de la multiplicación, excepto con la conmutativa. En aquél, el multiplicando se llama prefactor y el multiplicador es el postfactor. De aquí que haya dos tipos de multiplicación,

- a) Premultiplicación $[a] \cdot [b]$
- b) Postmultiplicación $[b] \cdot [a]$

No es lo mismo,

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

que,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -4 & 8 & 2 \\ 8 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

Para multiplicar varias matrices se aplica la ley asociativa.

Potencias enteras positivas. Una matriz cuadrada puede ser multiplicada n veces por sí misma. El producto resultante es la potencia n de la matriz.

Matriz unidad $[1]$ de orden n es una matriz diagonal en la que todos sus elementos son 1.

$$d_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases} \text{ (Símbolo de Kronecker)}$$

$$[1] \cdot [a] = [a] ; [a] \cdot [1] = [a]$$

Producto nulo. Si el producto de 2 matrices es nulo, es condición suficiente pero no necesaria que una de ellas sea nula,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz traspuesta. Es la matriz que se obtiene al permutar renglones por columnas de igual índice.

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}; [a]^{t} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Matriz adjunta. Si Γ_{ij} es el cofactor* del elemento a_{ij} en el determinante $|a|$ de la matriz $[a]$, la matriz Γ_{ji} (nótese que es Γ_{ji} y no Γ_{ij}) es la matriz adjunta.

Para calcular la adjunta de una matriz $[a]$ debe obtenerse primero la traspuesta, reemplazando luego los elementos a_{ji} de la traspuesta, por sus cofactores Γ_{ji} .

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}; [a'] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{11} = +(5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) = -3; \Gamma_{21} = -(2 \cdot 9 - 3 \cdot 8) = +6; \Gamma_{31} = +(2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) = -3$$

$$\Gamma_{12} = -(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) = +6; \Gamma_{22} = +(1 \cdot 9 - 3 \cdot 7) = -12; \Gamma_{32} = -(1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) = +6$$

$$\Gamma_{13} = +(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = -3; \Gamma_{23} = -(1 \cdot 8 - 2 \cdot 7) = +6; \Gamma_{33} = +(1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = -3$$

$$[a] = [\Gamma_{ji}] = \begin{bmatrix} -3 & +6 & -3 \\ +6 & -12 & +6 \\ -3 & +6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & +2 & -1 \\ +2 & -4 & +2 \\ -1 & +2 & -1 \end{bmatrix}$$

Inversión de matrices. Inverso de una matriz cuadrada $[a]$ o matriz recíproca de $[a]$ es una matriz de símbolo $[a]^{-1}$ ó $[a]^*$, siendo necesario que $[a] \neq 0$, esto es, que $[a]$ no sea singular. Para obtener la matriz inversa:

- 1) Se obtiene la traspuesta $[a]^{t}$
- 2) Se calcula la adjunta $[a] \Gamma$
- 3) Se determina el valor de $|a|$
- 4) El cociente $\frac{[a] \Gamma}{|a|}$ dará $[a]^{-1}$

* Cofactor de un elemento o menor complementario es el subdeterminante formado el suprimir la fila y la columna de ese elemento. Ténganse en cuenta sus signos:

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Sea la matriz $[a] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; su traspuesta $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

y la adjunta $\begin{bmatrix} 7 & -10 & 2 \\ 6 & -4 & -4 \\ -5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

El determinante de la matriz original es $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 8$

El cociente $\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 7 & -10 & 2 \\ 6 & -4 & -4 \\ -5 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} & -\frac{10}{8} & \frac{2}{8} \\ \frac{6}{8} & -\frac{4}{8} & -\frac{4}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{6}{8} & \frac{2}{8} \end{bmatrix}$ es la matriz $[a]^{-1}$

Propiedades de la matriz inversa:

1o. $[a]^{-1} \cdot [a] = [a]^{-1} = 1$

Los factores $[a] \cdot [a]^{-1}$ son conmutables pues el producto en ambos casos es $[1]$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{16} & \frac{2}{16} & \frac{2}{16} \\ \frac{4}{16} & \frac{4}{16} & \frac{4}{16} \\ -\frac{4}{16} & \frac{12}{16} & -\frac{4}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{16} & \frac{2}{16} & \frac{2}{16} \\ \frac{4}{16} & \frac{4}{16} & \frac{4}{16} \\ -\frac{4}{16} & \frac{12}{16} & -\frac{4}{16} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2o. ([a]^{-1})^n = ([a]^n)^{-1} = [a]^{-n}$$

$$3o. [a]^{-1} = \frac{1}{[a]}$$

$$4o. ([a]^{-1})^{-1} = [a]$$

División matricial de $[a] / [b]$ se efectúa multiplicando $[a]$ por $[b]^{-1}$.

BIBLIOGRAFÍA

- BELL, R. J. T. (1912) *Coordinate Geometry of Three Dimensions*. MacMillan, London.
- BOUASSE (1925) *Optique Cristalline*. Doble refracción.
- BORN, M. (1923) *Atomtheorie des Festen Zustandes*. Teubner, Leipzig.
- BRAC, W. H. y BRAGG, W. L. (1933) *The Cristalline State*. Bell, London.
- BRIDGMAN, P. W. (1934) *The thermodynamics of electrical phenomena in metals*. MacMillan, New York.
- CURIE, P. (1894) Bull. Soc. Franç. Min. 17.
- EL-HINNAWI, E. E. (1966) *Methods in Chemical and Mineral Microscopy*. Elsevier, New York.
- JOFFÉ, A. F. (1928) *The Physics of Crystals*. McGraw-Hill, New York.
- JOHANNSEN, A. (1918) *Manual of Petrographic Methods*. McGraw-Hill, New York.
- KERN, R. (1962) *Cours de Cristallographie Géométrique et Physique*. Nancy.
- LIEBISCH, Th. (1891) *Physikalische Krystallographie*. Veit, Leipzig.
- MALLARD, E. (1884) *Cristallographie I y II*.
- MEGAW, H. (1957) *Ferroelectricity in Crystal*.
- NYE (1957) *Physical Properties of Crystals*.
- RAMACHANDRAN y RAMASESHAM (1961) *Cristal Optics*, en Handbook der Physik.
- SHUBNIKOV (1960) *Principles of Optical Crystallography*.
- SZIVESSY (1928) *Kristaloptik*, en Handbuch der Physik.
- VOIGT, M. (1898) *Die fundamentalen Physikalischen Eigenschaften der Kristalle*.
- WOLF y BORN (1956) *Principles of Optics*.
- WOOSTER, W. A. (1949) *Crystal Physics*.
- (1957) *Experimental Crystal Physics*.

Conviene hacer notar que las figs. 41, 42, 47, 48, 54-57 y 64. fueron tomadas de la obra WAHLESTROM. E. E., *Optical Crystallography*. Ed. 3. Wiley, New York.

INDICE ANALITICO

- Absorción: 66, 80, 111.
 Absorción de la luz: 63.
 Absorción del rayo: 63.
 Acción de la temperatura: 57.
 Acido acético: 127.
 Actinoelectricidad: 54.
 Adición: 95.
 Adularia: 46.
 Agua: 78.
 Alargamiento de alambres: 37.
 Aleaciones: 136.
 Alcromático: 62.
 Alumbre: 45, 111.
 Aluminio: 116.
 Amatista: 62.
 Analizador: 82, 87, 88, 90, 92, 107.
 Anfiboles (Hornblendas): 34, 92.
 Angulo de extinción: 91.
 Angulo de los ejes ópticos: 74, 125.
 Angulo de polarización: 79.
 Angulo de rotación: 110.
 Angulo límite: 65.
 Angulo óptico: 125.
 Anhidrita: 91.
 Anillos de interferencia: 98.
 Anisotropía: 15, 67, 137.
 Apatito: 41, 63.
 Aragonito: 63, 115, 123, 124.
 Arista: 89, 143.
 Atracciones electrostáticas: 28.
 Augita: 46, 62.
 Azufre: 53, 55, 118.
 Azurita: 62.
 Balanza de Mohr Westphal: 18.
 Bálsamo de Canadá: 81.
 Bandas o zonas de Brillouin: 51.
 Baritita: 33, 34.
 Bartholinus: 67.
 Berilio: 115.
 Berilo: 124.
 Bibliografía: 157.
 Birrefringencia: 67, 69, 96, 98, 107, 125.
 Birrefringente: 80, 123.
 Bisectrices: 89.
 Bisectriz: 102.
 Bisectriz aguda: 74.
 Bisectriz obtusa: 74.
 Bismuto: 116, 118.
 Bizcocho de porcelana: 62, 65.
 Blenda: 79, 126, 127.
 Brillo: 61, 65, 66.
 Brinell: 41.
 Brookita: 117, 125.
 Cadenas espirales: 127.
 Cadmio: 115, 117.
 Calcita: 13, 31, 41, 53, 63, 72, 115, 123, 124, 126.
 Cálculos biliares: 136.
 Calentamiento: 53, 56.
 Calor: 63.
 Calor específico: 16.
 Cambio a longitud de onda mayor: 63.

- Campo eléctrico: 49, 57, 60, 61, 112, 128.
 Campo electromagnético: 60.
 Campo magnético: 43, 60.
 Campo oscuro: 92.
 Cansancio de metales: 136.
 Caparazón de moluscos: 136.
 Carácter óptico: 74.
 Caras: 143.
 Caras centrosimétricas: 110.
 Carborundo: 117.
 Carga de polarización: 56.
 Cargas eléctricas: 56, 127.
 Carnalita: 62.
 Celda elemental: 148.
 Celda fundamental: 148.
 Cera: 53.
 Cianuro de Mg y Pt: 63.
 Cristales uniáxicos positivos: 73.
 Clases de simetría no piroeléctricas: 56.
 Clases de simetría piroeléctricas: 57.
 Clerici: 18.
 Clorato Na: 127.
 Cobaltita: 45.
 Cobre: 45.
 Coeficiente de permeabilidad magnética: 43.
 Coeficiente dilatación: 30, 64, 124.
 Coeficiente dilatación lineal: 121.
 Coeficiente piroeléctrico: 56.
 Coeficientes de dilatación: 30.
 Coeficientes principales: 22.
 Color: 61, 87.
 Color superficial: 61.
 Colores de interferencia: 89, 93, 107.
 Colores de polarización: 92.
 Compensador de cuarzo: 96.
 Compensadores: 94.
 Compensación: 95.
 Componentes ortogonales de un tensor: 22.
 Compresión: 28, 126, 127, 128.
 Conchas: 136.
 Conducción de la energía eléctrica: 111.
 Conducción iónica: 51, 52.
 Conducción metálica o electrónica: 51.
 Conductibilidad: 53, 117, 118.
 Conductibilidad eléctrica: 51, 118.
 Conductibilidad electrónica: 119.
 Conductibilidad específica: 118.
 Conductibilidad superficial: 55, 56.
 Conductibilidad térmica: 112, 116.
 Conductibilidad unipolar: 117.
 Conductores eléctricos: 51.
 Conoscopio: 87, 96, 110.
 Constante dieléctrica: 48, 49, 112, 116.
 Constitución molecular de los cristales: 33.
 Construcción de Poincot: 147.
 Cordier: 64.
 Cordierita: 64.
 Corindón: 41.
 Corrimiento: 36.
 Craso: 66.
 Crisoberilo: 62.
 Cristal: 135, 137.
 Cristal anisótropo: 92.
 Cristal biáxico: 96, 102.
 Cristal birrefringente: 79.
 Cristal isótropo: 97.
 Cristal mosaico: 117.
 Cristal piezoeléctrico: 57, 58, 128.
 Cristal piroeléctrico: 58.

- Cristal uniáxico: 73, 74, 89, 95, 96, 97, 102, 125.
 Cristal, como equilibrio termodinámico: 13.
 Cristal, definición física: 13.
 Cristal, definición geométrica: 13.
 Cristales anisótropos: 69.
 Cristales biáxicos: 73, 74, 87, 89, 125.
 Cristales biáxicos negativos: 74.
 Cristales biáxicos positivos: 74.
 Cristales centrosimétricos: 131.
 Cristales cúbicos: 124.
 Cristales ortoclínicos: 95.
 Cristalización, causas: 13.
 Crucero: 34, 89.
 Cruz negra: 98, 102.
 Cuarzo: 32, 41, 50, 53, 56, 62, 66, 95, 107, 115, 116, 118, 123, 124, 126, 127, 128.
 Cuerpo monorrefringente: 92.
 Cuerpos amorfos: 67.
 Cuerpos birrefringentes: 92.
 Cuerpos dieléctricos: 118.
 Cuerpos isótropos: 69, 72.
 Cuña de cuarzo: 95.
 Curie: 126.
 Curva de dureza: 42.
 Defectos: 52.
 Deformación: 28.
 Deformación de una esfera por corrimiento: 37.
 Deformación elástica: 127.
 Deformación heterogénea: 28, 31.
 Deformación homogénea: 28.
 Deformación mecánica: 53.
 Deformación plástica: 31.
 Densidad óptica: 61, 67.
 Desfasaje: 76.
 Desplazamiento: 60.
 Desplazamiento eléctrico: 60.
 Detector: 117.
 Determinación de la birrefringencia: 96.
 Determinación direcciones de extinción: 89.
 Dextrógiro: 109, 110.
 Diafragma condensador: 82, 87, 88.
 Diamagnético: 44, 46.
 Diamante: 41, 53, 63, 65, 66, 123, 125.
 Diamante exfoliación: 33.
 Diatérmicos: 111.
 Dicroísmo: 64, 87.
 Dicroita: 64.
 Diferencia de fase: 90, 92.
 Difracción rayos X: 30.
 Dilatación: 28, 128.
 Dilatación de los cristales: 120, 121.
 Dilatación térmica: 28.
 Dilatación volumétrica: 123.
 Dimagnético: 43.
 Dióptrico: 61.
 Dipolos: 49.
 Dirección de isotropía: 72, 98.
 Dirección de máxima cohesión: 33, 36.
 Dirección de propagación: 60.
 Discontinuidades coeficientes dilatación: 30.
 Distena: 41.
 Distinción entre mono y birrefringente: 92.
 Doble refracción: 79, 81.
 Dureza: 40.

- Ecuación de Fresnel: 60, 61, 69.
 Ecuación de una cuádrada centrada: 23.
 Ecuaciones Maxwell-Hertz: 60.
 Edificios iónicos: 27.
 Efecto gironagnético: 46.
 Efecto de la simetría: 131.
 Efecto de la simetría sobre un II-tensor: 24.
 Efecto Einstein y Haas: 46.
 Efecto giromagnético: 46.
 Eje cristalográfico: 72.
 Eje de isotropía: 109.
 Eje eléctrico: 126, 128.
 Eje óptico: 71, 72, 80, 89, 102, 107.
 Eje principal de simetría: 73, 118.
 Ejes de absorción: 87.
 Ejes ópticos: 73, 89, 96.
 Ejes polares: 127.
 Ejes principales de la elipse: 89.
 Elasticidad: 27.
 Elasticidad de los cristales: 32.
 Electricidad + Y - : 55.
 Electrómetro: 56, 126.
 Electronegativo: 53.
 Electrones libres: 51.
 Electropositivo: 53.
 Elementos de la teoría de matrices: 149.
 Elevación de temperatura: 119.
 Eliminación de un rayo polarizado: 80.
 Elipsoide: 72, 73, 74, 110, 117.
 Elipsoide de Fresnel: 72.
 Elipsoide de índices: 72, 122.
 Elipsoide de revolución: 64.
 Elipsoide de 3 ejes: 64.
 Elipsoide referido a sus ejes principales: 24.
 Elongación negativa: 96.
 Elongación positiva: 96.
 Energía cinética: 120.
 Energía potencial: 120.
 Enfriamiento: 53.
 Epitaxis: 80.
 Escala de dureza (de Mohs): 40.
 Escala de Newton: 93, 94.
 Esclerómetro: 40.
 Esfalerita: 56, 124.
 Esfera: 64.
 Esfera de cristal: 107.
 Esfera electrizada: 49.
 Esfuerzos: 136.
 Espacio de la reflexión total: 65.
 Espato de Islandia: 33, 67, 69, 71, 80, 81.
 Espato de Islandia, corrimiento: 36, 38.
 Espato Islandia, exfoliación: 34.
 Espesor de la lámina: 90.
 Espesor del grano: 87.
 Espiral de interferencia: 110.
 Espirales de Airy: 110.
 Esquiódromo de Becke: 96, 98.
 Estano: 117.
 Esiibinita: 36.
 Eter: 60.
 Exfoliación: 33, 87.
 Exfoliación, propiedad centro-simétrica: 34.
 Extinción: 91, 94, 96, 98, 109.
 Extinciones en las maclas: 92.
 Falsa piroelectricidad: 56.
 Fatiga de los metales: 37.
 Ferroelectricidad: 57.
 Ferromagnético: 43, 45.

- Ferromagnetismo: 46.
 Figuras de Chladni: 32.
 Figuras de interferencia: 89, 107.
 Fila de vidrios: 79.
 Flexión: 31.
 Flujo vectorial de calor: 112.
 Fluorescencia: 63.
 Fluorita: 41, 45, 54, 63, 66, 79, 115, 123.
 Fluorita, exfoliación: 33.
 Formas del grano: 87.
 Fosfato de amonio: 107.
 Fosforescencia: 63.
 Fósforo: 63.
 Fotoelasticidad: 123.
 Fotoelectricidad: 54.
 Fractura: 39.
 Fractura astillosa: 39.
 Fractura concoidea: 39.
 Fractura ganchuda: 39.
 Franja de Becke: 87.
 Franja de Schroeder van der Kolk: 88.
 Franjas de interferencia: 122.
 Franjas de interferencia de Fresnel: 60.
 Frecuencia vibración: 128.
 Frente de onda: 61.
 Frotamiento: 53.
 Fucsina: 63, 66.
 Fulgor: 65.
 Función de debilitamiento: 63.
 Galena: 41, 117, 123.
 Glaciares: 36.
 Gradiente de temperatura: 112.
 Grafito: 116.
 Granate piropro: 64, 79.
 Grano mineral: 88.
 Grosor del grano: 89.
 Grupos de Laue: 34, 145.
 Grupos de orientación: 72.
 Guezejus: 53.
 Hábito cristalino: 47.
 Hábito prismático: 89.
 Halita: 31, 33, 41, 45, 52, 62, 111, 116, 117, 119, 123, 135.
 Halita exfoliación: 34.
 Haluros alcalinos: 53.
 Haz monocromático: 89.
 Haz paralelo: 62.
 Hematita: 118.
 Hemihidrato: 91.
 Hemimorfita: 57.
 Hielo: 79, 142.
 Hielo, corrimiento: 36.
 Hilo reticular: 87.
 Hipérbolas: 102.
 Homogeneidad: 15.
 Hornblenda: 62.
 Huecos: 52.
 Huyghens: 67.
 Idiocromático: 6.
 Iluminación: 54, 88.
 Iluminación oblicua: 88.
 Imanes: 43.
 Indicatriz de Fletcher: 74.
 Indicatriz de Fresnel: 89.
 Indicatriz de una propiedad: 22.
 Índice de absorción: 66.
 Índice de refracción: 49, 61, 64, 67, 68, 69, 81, 87, 89.
 Índice extraordinario: 89.

- Índice ordinario: 89.
 Índices de los minerales: 69.
 Índices de refracción: 72, 73, 89, 90, 94, 109, 125.
 Índices principales: 89.
 Inducción eléctrica: 50.
 Inducción electrostática: 48, 49.
 Inducción magnética: 44, 61, 112.
 Influencia de la temperatura: 118, 124.
 Influencia del magnetismo en cristalización: 47.
 Infrarrojo: 63.
 Intensidad de un campo eléctrico: 50.
 Intensidad del campo magnético: 43.
 Interferómetro de Fizeau: 122.
 Isógrafos: 102.
 Isotropía: 67, 137.
- Lámina auxiliar: 94.
 Lámina compensadora de cuarzo: 95.
 Lámina mica 1/4 onda: 94.
 Lámina tinta sensible: 94, 96.
 Láminas paralelas al eje óptico: 87.
 Lemniscatas: 102.
 Lente de Bertrand: 96.
 Levógiro: 109, 110.
 Ley de Born: 27.
 Ley de Coulomb: 27, 48.
 Ley de Hooke: 31.
 Ley de los Senos: 71.
 Ley Ohm: 51.
 Límite de elasticidad: 31.
 Límite estabilidad edificio cristalino: 31.
 Línea exfoliación: 89.
 Líneas del diagrama de polvo: 30.
 Líquido denso: 18.
- Longitudes onda: 66.
 Luminiscencia: 63.
 Luz: 63.
 Luz absorbida: 61, 63.
 Luz amarilla del Na: 87.
 Luz blanca: 63.
 Luz convergente: 87.
 Luz incidente: 62.
 Luz monocromática: 87, 107, 122.
 Luz natural: 75.
 Luz ordinaria: 76, 77.
 Luz paralela: 87, 91.
 Luz parcialmente polarizada: 79.
 Luz polarizada: 76, 77, 123.
 Luz polarizada circularmente: 77.
 Luz polarizada elípticamente: 76.
 Luz polarizada en un plano: 76, 82.
 Luz polarizada linealmente: 76, 77.
 Luz reflejada A: 61.
 Luz refractada B: 61.
- Macla por corrimiento: 39.
 Maclas: 92.
 Maclas polisintéticas: 92.
 Magnesita: 123.
 Magnetita: 41, 45, 123.
 Malaquita: 62.
 Mares de la luna: 79.
 Mármol: 13, 39.
 Masa eléctrica: 48, 126.
 Masa magnética: 43.
 Máxima iluminación: 91.
 Máximos y mínimos de Fermat: 67.
 Medición índices de refracción: 87.
 Medio anisótropo: 61, 113, 114, 121.
 Medio cristalino, propiedades fundamentales: 15.
 Medio isótropo: 60, 111, 121.

- Medio óptico: 69.
 Mercurio: 124.
 Metales: 65, 79.
 Mezcla de radiaciones: 63.
 Mica: 53, 107.
 Micrófono piezoeléctrico: 128.
 Microscopio: 92, 98.
 Microscopio polarizante: 82.
 Minerales de uranio: 63.
 Minerales uniáxicos: 87.
 Mín. ma iluminación: 91.
 Minio: 55.
 Mitscherlich: 30.
 Módulo de elasticidad: 32.
 Módulo piezoeléctrico: 130.
 Módulos piezoeléctricos: 132.
 Mohs: 40.
 Molibdenita: 117.
 Momento magnético: 44.
 Monorrefringencia: 69, 72, 98.
 Movilidad catiónica: 53.
 Movimiento ondulatorio del éter: 59.
- Nicol: 81.
 Nicoles cruzados: 91.
 Nieve: 142.
 Níquel: 124.
 Nomograma de Michel-Levy: 96.
 Nube de electrones: 65.
- Observaciones conoscópicas: 96.
 Observaciones en ortoscopio: 87.
 Obsidiana: 79.
 Ocular: 87.
 Ojo humano: 76.
 Onda incidente: 76.
 Onda polarizada linealmente: 109.
- Onda refractada: 76.
 Ondas: 67.
 Ondas elásticas transversales: 60.
 Ondas polarizadas circularmente: 109.
 Ondas polarizadas perpendicularmente: 90.
 Ondulación sinusoidal: 61.
 Ondulaciones electromagnéticas: 60.
 Opaco: 62, 63.
 Operadores de simetría: 146.
 Óptica cristalina: 60.
 Orientación del cristal: 89.
 Oro: 63.
 Ortosa: 41, 125.
 Ortoscopio: 87, 89, 97, 110.
 Oscilógrafo: 128.
 Ovalos de Cassini: 102.
- Par de rotación: 128.
 Par termoeléctrico: 54.
 Paramagnético: 43, 44, 46.
 Paramagnetismo: 46.
 Penetración (dureza): 40.
 Perfección de la exfoliación: 33.
 Perlado: 66.
 Perlas: 136.
 Permeabilidad: 50.
 Permeabilidad eléctrica: 49, 72.
 Permeabilidades principales: 61.
 Peso específico: 16.
 Piedras preciosas: 65.
 Piezoelectricidad: 53.
 Piezocristales: 128.
 Piezoelectricidad: 54, 126, 127, 131.
 Pirita: 45, 62, 117, 119.
 Piroefecto: 127.
 Piroelectricidad: 53, 55.

- Piroxenos (augitas): 34, 92.
 Placa compensadora mica 1/4 onda: 110.
 Placas de polaroide: 107.
 Plagioclasas: 92.
 Plano de corrimiento: 36.
 Plano de macla: 89.
 Plano de onda: 75, 96.
 Plano de polarización: 76, 87, 109.
 Plano incidente: 71.
 Plano óptico: 89, 125.
 Plano reticular: 67.
 Plata: 118.
 Plata córnea: 111.
 Platina: 87.
 Platina giratoria: 82.
 Pleocroísmo: 64, 87.
 Poder rotatorio: 110.
 Polarización: 67, 75, 80, 130.
 Polarización eléctrica: 49, 50, 56.
 Polarización elíptica: 77.
 Polarización lineal: 69.
 Polarización magnética: 44.
 Polarización por reflexión: 78.
 Polarización por refracción: 78.
 Polarización rectilínea: 77.
 Polarización rotatoria: 107.
 Polarizador: 82, 87, 90, 92.
 Polarizantes: 82, 87, 91, 92.
 Polarizantes cruzados: 87, 89, 92, 94, 96, 107.
 Polaroide: 80.
 Policroísmo: 64.
 Polivinilo: 80.
 Polo análogo: 55.
 Polo antilogo: 55.
 Polo norte del imán: 43.
 Polo sur del imán: 44.
 Presión: 31, 53.
 Presión hidrostática: 28.
 Prisma de Nicol: 81.
 Producción de cargas eléctricas: 53.
 Propiedades eléctricas de los cristales: 48.
 Propiedades escalares: 16.
 Propiedades físicas: 16.
 Propiedades magnéticas de los cristales: 43.
 Propiedades mecánicas de los cristales: 27.
 Propiedades ópticas de los cristales: 59, 124.
 Propiedades simétricas de los tensores: 21.
 Propiedades tensoriales: 18.
 Propiedades térmicas de los cristales: 111.
 Propiedades vectoriales: 18.
 Psilomelana: 117.
 Pulido (dureza): 40.
 Punto de Curie: 57, 58.
 Punto de fusión de los cristales: 31.
 Raya: 62, 65.
 Raya gris: 62.
 Raya negra: 62.
 Rayado: 40.
 Rayo extraordinario: 69, 80, 81.
 Rayo luminoso: 75.
 Rayo ordinario: 69, 80, 81.
 Rayo reflejado: 78.
 Rayo refractado: 71, 78.
 Rayos caloríficos: 111.
 Rayos infrarrojos: 54, 111.
 Rayos luminosos: 111.
 Rayos ultravioleta: 54.
 Relatividad de Galileo: 59.

- Rectificadores: 51.
 Redes cristalinas: 127.
 Reflejos internos: 65.
 Reflexión metálica: 66.
 Reflexión total: 65, 81.
 Refracción: 125.
 Refracción doble: 7, 72.
 Refracción sencilla: 72.
 Refracciones sucesivas: 79.
 Relación de los senos: 71.
 Relaciones eléctricas: 114.
 Relaciones magnéticas: 114.
 Relieve del grano: 87.
 Representación geométrica de un II-tensor: 22.
 Repulsiones iónicas: 28.
 Resistencia: 119.
 Resistencia a la velocidad de la luz: 68.
 Resistencia específica: 118, 119.
 Resistividad: 51, 118.
 Resistividad eléctrica: 117.
 Rhorbach: 18.
 Romboedro: 69.
 Rotación específica: 110.
 Rotación impropia: 147.
 Rotación inversora: 147.
 Rotación óptica: 107.
 Rotación propia: 146.
 Rubí: 62.
 Rutilo: 115.
 Sacarosa: 57, 127.
 Sal de Rochelle: 107.
 Sal de Seignette: 58, 127.
 Scheelita: 41.
 Sección cíclica: 74.
 Sección principal: 71, 80, 81.
 Sedoso: 66.
 Semiconductores: 51.
 Semiejes del elipsoide: 24.
 Siderita: 66.
 Signo de elongación: 95, 96.
 Signo óptico: 96.
 Sillares cristalinos: 67, 69, 77.
 Silvita: 111.
 Simetría: 16, 137.
 Simetría cristalina: 72.
 Simetría del tensor $[\epsilon]$: 2.
 Simetría térmica: 122.
 Singonía cúbica: 72.
 Singonía exagonal: 72.
 Singonía monoclinica: 73.
 Singonía ortoclinica: 73.
 Singonía tetragoniaul: 72.
 Singonía triclinica: 73.
 Singonía trigonal: 72.
 Singonías cristalinas: 138.
 Sistema de referencia: 18.
 Sistemas cristalinos: 138.
 Solidificación: 31.
 Spin antiparalelo: 46.
 Spin paralelo: 46.
 Suceptibilidad magnética: 115.
 Superficie de dilatación térmica: 122.
 Superficie de elasticidad: 31, 33.
 Superficie de exfoliación: 33.
 Superficie focal plana: 87.
 Superficies de Bertin: 98, 102.
 Susceptibilidad: 50.
 Susceptibilidad eléctrica: 49.
 Susceptibilidad magnética: 45.
 Talco: 41.
 Temperatura: 16.
 Tensión: 128.

- Tensor de segundo orden, II-tensor: 20.
 Tensor de tensión: 129.
 Tensor de tercer orden, III-tensor: 20.
 Tensor dieléctrico: 113.
 Tensores de cuarto orden, IV-tensor: 21.
 Teoría de las ondulaciones (Huyghens-Fresnel): 59.
 Teoría de los quanta (Plank): 60.
 Teoría del magnetismo: 46.
 Teoría electromagnética (Maxwell-Hertz): 60.
 Teoría reticular: 127.
 Teorías de la emisión de la luz: 59.
 Teorías de la luz: 59.
 Termoelectricidad: 54.
 Thoulet: 18.
 Topacio: 41, 53, 123.
 Trabajo en frío de los metales: 37.
 Tracción: 31, 53, 126.
 Transformación de vectores y tensores: 19.
 Transformación sistema antiguo-nuevo: 19.
 Transformación sistema nuevo-antiguo: 20.
 Transistores: 52.
 Transparencia: 61, 62, 63.
 Traslúcido: 62.
 Triboelectricidad: 53.
 Turmalina: 55, 57, 64, 80, 117, 126, 127.
 Ultraondas: 128.
- Vacantes: 52.
 Vacantes de Frenkel: 52.
 Vacantes de Schottky: 52.
 Valor de un tensor según [u v w]: 22.
 Valores de ϵ para cristales: 50.
 Variación coeficiente dilatación: 124.
 Variación de temperatura: 55, 121.
 Vector de desplazamiento: 29.
 Vector de desplazamiento eléctrico: 75.
 Vector de inducción eléctrica: 112.
 Vector de polarización: 57.
 Vector de Poynting: 61.
 Vector magnético: 112.
 Vector unitario [u v w]: 61.
 Viajes interplanetarios: 79.
 Vibración de placas: 32.
 Vibración elíptica: 76.
 Vibración extraordinaria: 87.
 Vibración ordinaria: 87.
 Vibraciones asimétricas: 120.
 Vibraciones elípticas: 109.
 Vibraciones radiofónicas: 136.
 Vickers: 41.
 Vidrio: 53, 65, 78, 79.
 Wurtzita: 57.
 Yeso: 41, 91, 107, 123, 125.
 Yodoquinina: 80.
 Zafiro: 62.
 Zinc: 117, 124.
 Zircón: 46.

50. *Las Meteoritas Mexicanas*, por JOSÉ C. HARO, 1931. \$ 50.00 M.N. \$ 5.00 Dlls.
 51. *Zonas Mineras de los Estados de Jalisco y Nayarit*, por TOMÁS BARRERA, 1931. Agotado. Out of Print.
 53. *Topografía Sepultada en la Región de Santa Rosalía, B. C.*, por IVAN F. WILSON, 1948. \$ 25.00 M.N. \$ 2.50 Dlls.
 54. *Paleontología y Estratigrafía del Plioceno de Yepómera, Edo. de Chihuahua (Primera Parte)*, por JOHN F. LANCE, 1950. \$ 25.00 M.N. \$ 2.50 Dlls.
 55. *Los Estudios Paleobotánicos de México*, por MANUEL MALDONADO KOERDELL, 1950. \$ 25.00 M.N. \$ 2.50 Dlls.
 56. *Las Provincias Geohidrológicas de México (Segunda Parte)*, por ALFONSO DE LA O. CARREÑO, 1954. \$ 30.00 M.N. \$ 3.00 Dlls.
 57. *Espeleología Mexicana, Cuevas de la Sierra Madre Oriental de la Región de Xilitla*, por FEDERICO BONET, 1953. Agotado. Out of Print.
 58. *Geología y Paleontología de la Región de Caborca*, por G. ARTHUR COOPER y otros, 1954. Agotado. Out of Print.
 Pt. III. *Fauna Pérmica de El Antimonio, Oeste de Sonora, México*, por G. ARTHUR COOPER y otros, 1965. \$ 30.00 M.N. \$ 3.00 Dlls.
 59. *Los Depósitos de Bauxita en Haití y Jamaica y posibilidades de que exista Bauxita en México*, por GUILLERMO P. SALAS, 1959. \$ 30.00 M.N. \$ 3.00 Dlls.
 60. *Geología del Estado de Morelos y de Partes Adyacentes de México y Guerrero, Región Central Meridional de México*, por CARL FRIES, JR., 1960. \$ 50.00 M.N. \$ 5.00 Dlls.
 61. *Fenómenos Geológicos de Algunos Volcanes Mexicanos*, por LUIS BLÁSQUEZ L., ARMANDO REYES LAGOS, FEDERICO MOOSER y JOSÉ L. LORENZO, 1961. \$ 20.00 M.N. \$ 2.00 Dlls.
 62. *Reconocimiento Geológico en la Sierra Madre del Sur, entre Chilpancingo y Acapulco, Edo. de Guerrero*, por ZOLTÁN DE CSERNA, 1965. \$ 30.00 M.N. \$ 3.00 Dlls.
 63. *Contribución al Estudio de Minerales y Rocas*, por EDUARDO SCHMITTER y RUTH ROJAS DE GÓMEZ, 1962. \$ 30.00 M.N. \$ 3.00 Dlls.
 64. *Estudios Geocronológicos de Rocas Mexicanas*, por CARL FRIES, JR., 1962. Agotado. Out of Print.
 65. *Estudios Mineralógicos y Petrográficos del Casquete y la Sal de Algunos Damos Salinos del Istmo de Tehuantepec, México*, por SALVADOR ENCISO DE LA VEGA, 1963. \$ 30.00 M.N. \$ 3.00 Dlls.
 66. *Revisión Crítica de los Minerales Mexicanos*, BOLEÍTA, por FRANCISCO J. FABREGAT, 1963. \$ 40.00 M.N. \$ 4.00 Dlls.

67. Pt. I. *Salinidad, Batimetría, Temperatura y Distribución de los Sedimentos Recientes de la Laguna de Términos, Campeche, México*, por AMADO YAÑEZ CORREA, 1963. \$ 25.00 M.N. \$ 2.50 Dlls.
- Pt. II. *Sistemática y Distribución de los Géneros de Diatomeas de la Laguna de Términos, Campeche, México*, por ANGEL SILVA B., 1963. \$ 25.00 M.N. \$ 2.50 Dlls.
- Pt. III. *Sistemática y Distribución de los Foraminíferos Recientes de la Laguna de Términos, Campeche, México*, por AGUSTÍN AYALA CASTAÑARES, 1963. \$ 75.00 M.N. \$ 7.50 Dlls.
- Pt. IV. *Sistemática y Distribución de los Micromoluscos Recientes de la Laguna de Términos, Campeche, México*, por ANTONIO GARCÍA-CUBAS, 1963. \$ 30.00 M.N. \$ 3.00 Dlls.
68. *Sistemática y Distribución de los Foraminíferos Recientes de la "Playa Washington" al S. E. de Matamoros, Tamps.*, por LUIS RAFAEL SEGURA V., 1963. \$ 30.00 M.N. \$ 3.00 Dlls.
69. *Geología del Area delimitada por el Tomatal, Huitzuc y Mayanlán, Estado de Guerrero*, por JOSÉ MA. BOLÍVAR, 1963. \$ 30.00 M.N. \$ 3.00 Dlls.
70. *Derrames Cineríticos Las Américas de la Región de El Oro Tlalpujahua, Estados de México y Michoacán, parte centromeridional de México*, por CARL FRIES JR., C. S. ROSS y ALBERTO OBREGÓN PÉREZ. En preparación Being prepared.
71. *Estudios Geológicos en los Estados de Durango y San Luis Potosí*, por DIEGO A. CÓRDOBA, EUGENIO CSERNA y ALEJANDRO BELLO BARRADAS, 1963. \$ 40.00 M.N. \$ 4.00 Dlls.
72. *Revisión Crítica de los Minerales Mexicanos, LA PLUMOSITA*, por FRANCISCO J. FABREGAT G., 1964. \$ 40.00 M.N. \$ 4.00 Dlls.
73. *Contribuciones del Laboratorio de Geocronometría. Partes I-III.*
- Pt. I. *Discusión de Principios y Descripción de la Determinación Geoquímica por el Método Plomo Alfa o Larsen*, por CÉSAR RINCÓN ORTA, 1965.
- Pt. II. *Nuevas aportaciones Geocronológicas y Técnicas empleadas en el Laboratorio de Geocronometría*, por CARL FRIES, JR. y CÉSAR RINCÓN ORTA, 1965.
- Pt. III. *Compendio de Edades de Radiocarbono de Muestras Mexicanas de 1962 a 1964*, por JOSEFINA VALENCIA y CARL FRIES, JR., 1965. \$ 45.00 M.N. \$ 4.50 Dlls.
74. *Estudios Geológicos en el Estado de Chihuahua. Partes I-II.*
- Pt. I. *Geología del área de Plomosas, Chih.*, por INTHER W. BRIDGES.
- Pt. II. *Notas sobre la Geología de la Región de Placer de Guadalupe y Plomosas, Chih.*, por ZOLTÁN DE CSERNA, 1966. \$ 45.00 M.N. \$ 4.50 Dlls.
75. *Estudios Mineralógicos*, por RICHARD V. GAINES:
1. *Mineralización de Telurio en la Mina La Moctezuma, cerca de Moctezuma, Sonora.*
2. *Métodos de Laboratorio para la Separación y Purificación de Muestras Minerales*, 1965. \$ 30.00 M.N. \$ 3.00 Dlls.
76. *Estudios de Mineralogía. Partes I-III.*
- Pt. I. *Los Minerales de Manganeso de Molango, Hgo.*, por LIBERTO DE PABLO GALÁN.
- Pt. II. *Caolinita de Estructura Desordenada de Concepción de Buenos Aires, Edo. de Jalisco, México*, por LIBERTO DE PABLO GALÁN.
- Pt. III. *Nota Preliminar sobre la Identificación por Rayos X, de Óxido Tálico Tl_2O_3* , por JESÚS RUIZ ELIZONDO, GLORIA ÁVILA I., OCTAVIO CANO CORONA y GLORIA AYALA ROJAS, 1965. \$ 35.00 M.N. \$ 3.50 Dlls.
77. *Los Minerales Mexicanos, 3. DURANGITA*, por FRANCISCO J. FABREGAT G., 1966. \$ 45.00 M.N. \$ 4.50 Dlls.
78. *Los Minerales Mexicanos, 4. CUMENGEITA*, por FRANCISCO J. FABREGAT G., 1966. \$ 40.00 M.N. \$ 4.00 Dlls.
79. *Los Minerales Mexicanos, 5. LIVINGSTONITA*, por FRANCISCO J. FABREGAT G., 1966. \$ 40.00 M.N. \$ 4.00 Dlls.
80. *"Biogeología Subsuperficial del Arrecife Alacranes, Yucatán"*, por FEDERICO BONET, 1967. \$ 60.00 M.N. \$ 6.00 Dlls.
81. *Ecology Distribution and Taxonomy of Recent Ostracoda of Laguna de Términos, Campeche, México*, por GUSTAVO A. MORALES. \$ 50.00 M.N. \$ 5.00 Dlls.
82. *Estudios de Geocronometría y Mineralogía.*
- Pt. I. *Edad de Tres Rocas Intrusivas en la Parte Centro Septentrional de México*, por JERJES PANTOJA ALOR y CÉSAR RINCÓN ORTA.
- Pt. II. *Nuevos datos sobre Mackayita*, por RICHARD V. GAINES.
- Pt. III. *Ilvaita de El Guariche, Mich.*, por LIBERTO DE PABLO.
- Pt. IV. *Cálculo Cristalográfico*, por FRANCISCO J. FABREGAT y RICARDO ESQUIVEL ESPARZA, 1967. \$ 30.00 M.N. \$ 3.00 Dlls.
83. *Los Minerales Mexicanos, 6. JALPAITA*, por FRANCISCO J. FABREGAT G., 1967. \$ 40.00 M.N. \$ 4.00 Dlls.
84. *Sedimentología de la Laguna Madre, Tamaulipas.*
- Pt. I. *Composición y distribución de los Sedimentos Recientes de la Laguna Madre, Tamaulipas*, por AMADO YAÑEZ y CARMEN SCHLAEPFER, 1968.

- Pt. II. *Minerales Pesados de los Sedimentos de la Laguna Madre, Tamaulipas*, por CARMEN J. SCHLAEPFER, 1968. \$ 40.00 M.N. \$ 4.00 Dlls.
85. *Los Minerales Mexicanos, 7. VANADINITA y ENDLICHITA*, por FRANCISCO J. FABREGAT G., 1970. \$ 50.00 M.N. \$ 5.00 Dlls.
86. *Ecología y Distribución de los Micromoluscos Recientes de la Laguna Madre, Tamaulipas, México*, por ANTONIO GARCÍA-CUBAS JR., 1968. \$ 50.00 M.N. \$ 5.00 Dlls.
87. *Ecología y Distribución de los Foraminíferos Recientes de la Laguna Madre, Tamaulipas, México*, por AGUSTÍN AYALA-CASTAÑARES y LUIS R. SEGURA, 1968. \$ 50.00 M.N. \$ 5.00 Dlls.
88. *Geología Marina de la Laguna de Tamiahua, Veracruz, México*, por RODOLFO CRUZ. \$ 40.00 M.N. \$ 4.00 Dlls.
89. *Algunos programas de Cálculo Cristalográfico mediante computadora electrónica*, por FRANCISCO J. FABREGAT G., 1971. \$ 50.00 M.N. \$ 5.00 Dlls.
90. *Espeleología de la región de Cacahuamilpa, Estado de Guerrero, México*, por F. BONET, 1971. \$ 70.00 M.N. \$ 7.00 Dlls.
91. *Ecología y distribución de los micromoluscos de la Laguna de Tamiahua, Veracruz, México*, por ANTONIO GARCÍA-CUBAS JR. \$ 40.00 M.N. \$ 4.00 Dlls.
92. *Sistema Caolinita-Caolinita Desordenada-Metahalosita-Endelita Atapulgita-Microscopia y Difracción Electrónica*, por LIBERTO DE PABLO GALÁN, 1971. \$ 40.00 M.N. \$ 4.00 Dlls.
93. *Fisiografía y Sedimentología del Delta del Río Balsas, Michoacán, México*, por MARIO GUTIÉRREZ-ESTRADA, 1971. \$ 40.00 M.N. \$ 4.00 Dlls.
94. *Las Arcillas de la Cuenca Carbonífera de Coahuila. Montmorrillonita le Estructura Interstratificada*, por LIBERTO DE PABLO GALÁN. *La Celda Reducida*, por FRANCISCO J. FABREGAT G., 1972. \$ 40.00 M.N. \$ 4.00 Dlls.
95. 1º *Cálculo cristalográfico. Programas para computadora electrónica*, por Francisco J. Fabregat G.
2º *Notas sobre la petrología del complejo oaxaqueño*, por Keith Bloomfield y F. Ortega-Gutiérrez.
3º *Fases del vulcanismo en la región de Tlanchinol, Hidalgo, México*, por Claude Robin y C. Bobier.
4º *Los hidróxidos de aluminio en los suelos de Chiapas*, por L. Castellanos, M. Medina V. y N. Aguilera. \$ 50.00 M.N. \$ 5.00 Dlls.
96. *Atapulgita sedimentaria marina de Yucatán, México*, por LIBERTO DE PABLO GALÁN. 33 p. 16 figs. *Cálculo cristalográfico. Programa de Cálculo electrónico*, por FRANCISCO J. FABREGAT GUINCHARD. 31-54 pp. *El vulcanismo de las planicies de la Huasteca, Este de México*, por CLAUDE ROBIN. 55-92 pp. *Geología de la Faja del Salto. Durango, México*, por DAVID EDWIN WAHL, JR. 93-182 pp. 23 figs. \$ 70.00 M.N. \$ 7.00 Dlls.

97. *Estudios geológicos-paleontológicos en la región Mixteca, PT. 1: Geología del área Tamazulapan. Teposcolula-Yanhuitlán, Mixteca Alta, Estado de Oaxaca, México*, por ISMAEL FERRUSQUÍA VILLAFRANCA. \$ 60.00 M.N. \$ 6.00 Dlls.
98. *Investigación Hidrogeológica de la región de "El Cardito" Zacatecas*, por JORGE GARCÍA CALDERÓN. \$ 40.00 M.N. \$ 4.00 Dlls.
99. *Cristalografía Física*, por FRANCISCO J. FABREGAT GUINCHARD. \$ 70.00 M.N. \$ 7.00 Dlls.

Para su adquisición diríjase al:
Instituto de Geología, Oficina de Publicaciones — Ciudad Universitaria,
México 20, D. F.

Se terminó de imprimir este libro
el día 20 de mayo de 1977 en los
talleres de la Editorial Libros de
México, S. A., Av. Coyoacán 1035,
México 12, D. F. Se imprimieron
1 200 ejemplares.